Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Análise computacional de viabilidade na composição de um portfólio baseado em diversificação e aleatoriedade

Gabriel Jean Wei Peng

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

São Paulo
Dezembro de 2022

Resumo

Gabriel Jean Wei Peng. **Análise computacional de viabilidade na composição de um portfólio baseado em diversificação e aleatoriedade**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Portfólio é um conjunto de ativos que o investidor acumula para se expor ao mercado financeiro desses ativos por meio de compras e vendas em períodos distintos com o intuito de obterem retorno capital positivo que ocorre dentro do mercado financeiro. Uma das características de um portfólio resiliente é sua diversificação, com isso, foi proposto o uso da teoria moderna de portfólio para que seja feita a otimização de carteira de investimento. Para isso, foi utilizado a linguagem Python para o desenvolvimento do software, utilizando três análises técnicas, das quais, uma é baseada nos valores dos preços e sua variação (teoria moderna de portfólio), e duas que se baseiam diretamente na análise da aleatoriedade (expoente de Hurst e transformada de Fisher). Como resultado, a aplicação do software resultou na formação de uma parábola (Markowitz bullet) , comprovou a aleatoriedade mostrando uma tendência, ou ausência desta, além de evidenciar a inversão de preços. Em conclusão, o software foi capaz de encontrar um portfólio ótimo de investimento, verificar a aleatoriedade e as inversões de preço.

Palavras-chave: Portfólio. Otimização. Divesificação. Expoente de Hurst. Transformada de Fisher. Mercado Financeiro.

Abstract

Gabriel Jean Wei Peng. **Computational feasibility analysis in the composition of a portfolio based on diversification and randomization**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

Portfolio is a set of assets that the investor accumulates to be exposed to the financial market of these assets through purchases and sales in different periods in order to obtain a positive capital return that occurs within the financial market. One of the characteristics of a resilient portfolio is its diversification, thus, it was proposed to use the modern portfolio theory to optimize the investment portfolio. For this, the Python language was used to develop the software, using three technical analyses, of which, one is based on price values and their variation (modern portfolio theory), and two are based directly on the analysis of randomness (Hurst exponent and Fisher transform). As a result, the application of the software resulted in the formation of a parabola (Markowitz bullet), proved the randomness showing a trend, or the lack of it, and also evidenced price inversion. In conclusion, the software was able to find an optimal investment portfolio, verify the randomness and the price inversions.

Keywords: Portfolio. Optimization. Diversification. Hurst exponent. Fisher transform. Financial Market.

Lista de figuras

2.1 Cotações da Petrobras. 7
2.2 Exemplos de candlesticks. 9

6.1 Média e desvio padrão dos retornos de portfólios gerados aleatoriamente. 22
6.2 Fronteira eficiente dos retornos de portfólios gerados aleatoriamente. . . 22
6.3 Expoente de Hurst para ativos gerados aleatoriamente. 23
6.4 Expoente de Hurst para os ativos que compõe o índice Ibovespa. 23
6.5 Transformada de Fisher para AAPL no ano de 2022. 24

Lista de tabelas

2.1 Exemplos de nomenclatura de uma ação (Cruz, 2011). 6

Sumário

1 Introdução **1**
1.1 Motivação . . . 1
1.2 Objetivos . . . 1
1.3 Estrutura deste Trabalho . . . 2

2 Mercado Financeiro **3**
2.1 Introdução . . . 3
2.2 Mercado de Ações . . . 3
2.3 Bovespa . . . 4
2.4 Valores Mobiliários . . . 5
2.5 Precificação de uma ação . . . 6
2.6 Investimento na Bolsa de Valores . . . 7
2.7 Análise de Mercado . . . 8
2.7.1 Análise Técnica . . . 8
2.7.2 Indicadores Técnicos . . . 9

3 Teoria moderna de portfólio **11**
3.1 Introdução . . . 11
3.2 Cálculo do risco e retorno . . . 12
3.3 Fronteira Eficiente . . . 14

4 Expoente de Hurst **15**
4.1 Introdução . . . 15
4.2 Cálculo e Análise R/S . . . 16
4.3 Ciclo ou memória de longo prazo na análise fractal . . . 17

5 Transformada de Fisher **19**
5.1 Introdução . . . 19
5.2 Função de Fisher . . . 19

5.3 Cálculo da transformada de Fisher 20

6 Análise e interpretação dos resultados **21**

7 Conclusão **25**

7.1 Conclusão 25

7.2 Futuro 25

Referências **27**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A população brasileira vem investindo cada vez mais no mercado financeiro de investimento de capital. O ano de 2020 foi marcado pela pandemia do coronavírus, que mudou o mundo, impactando negócios e a dinâmica do consumo e da renda, entre muitos outros aspectos. Soma-se a isto o ambiente de baixa taxa de juros que prevaleceu ao longo do ano. A pandemia mudou os hábitos das pessoas, causou uma perda de renda para parte da população e levou outra parcela a gastar menos. Em 2020, o número de investidores caiu pela primeira vez desde que a pesquisa foi feita. O declínio foi impulsionado pela saída da classe C. Também pela primeira vez, a economia perdeu seguidores, enquanto todos os outros produtos financeiros foram mais utilizados. Surpreendentemente, a grande maioria destes aportes são apenas em um tipo de investimento, o mais adotado deles à poupança (ANBIMA (Associação Brasileira dos Mercados Financeiros e de Capitais), 2021), que apesar de ser um investimento seguro e de fácil acesso, não é a melhor opção em relação à rentabilidade.

Porém, após um ano, apesar do cenário de incerteza global que aumentou a volatilidade nos mercados, o número de investidores de pessoa física com ativos em renda variável cresceu 35% entre o 3º trimestre de 2021 e igual período deste ano, passando de 3,3 milhões para 4,6 milhões (B3, 2022).

A concentração de investimentos em um só tipo de investimento aumenta o risco do investidor ter prejuízo, visto que um ativo é conceitualmente volátil, onde qualquer notícia negativa afeta fortemente o seu valor. Um modo de combater o alto risco de concentração de ativos em um portfólio e seu possível prejuízo é a diversificação de investimentos, uma técnica para diluição de riscos, porém a incerteza dos novos ativos escolhidos em desempenharem-se como bons investimentos se torna o novo problema.

1.2 Objetivos

Atualmente, existem diversas ferramentas e softwares financeiros que auxiliam os investidores do mercado financeiro, porém a grande maioria são pagas, e em muitos casos,

não é exposto a lógica por trás e nem sequer como é o funcionamento.

Deste modo, este trabalho tem como objetivo oferecer uma possível ferramenta ao qual um investidor possa utilizar para ajudar na filtragem de ativos, de modo a otimizar a sua carteira de investimentos, oferecendo um bom retorno em relação aos riscos que elas possam ocasionar.

Com o aparecimento da pandemia, diversas pessoas acabaram ficando isolados em suas casas, muitas delas acabaram entrando no mercado financeiro, porém sem conhecimento algum. Desta forma este trabalho também tem a finalidade de introduzir a essas pessoas, os conceitos básicos.

Uma das ferramentas que serão apresentadas neste trabalho, contribui numa das características mais básicas de investimento atual, a diversificação do portfólio, e juntamente com ele, técnicas de análise de gráfico com base em aleatoriedade e volatilidade do mercado acionário.

1.3 Estrutura deste Trabalho

Este documento será dividido em quatro partes:

- No capítulo 2 será apresentado conceitos básicos sobre o mercado financeiro, necessários para o entendimento do trabalho proposto, tais conceitos serão: mercado de ações, a bolsa de valores de São Paulo (Bovespa), valores mobiliários, precificação de uma ação, investimento na bolsa de valores e análise de mercado.
- Os capítulos 3, 4, e 5 tratam das ferramentas e teorias utilizadas neste trabalho, que são: a teoria moderna de portfólio de Markowitz, o expoente de Hurst e o indicador transformada de Fisher.
- O capítulo 6 mostra alguns dos resultados obtidos, junto com sua análise.
- O capítulo 7 é a conclusão do trabalho e uma discussão sobre o trabalho subsequente.

Capítulo 2

Mercado Financeiro

2.1 Introdução

O primeiro conceito de mercado financeiro foi introduzido no fim do anos 1400, em Antwerp, onde atualmente se localiza a Bélgica, que se tornou o centro de troca internacional. Vendedores do mundo todo compravam produtos antecipadamente esperando que o seu preço subisse obtendo deste modo um lucro. Porém o primeiro mercado financeiro que mais se aproxima ao dos dias de hoje foi criado em Amsterdam nos anos entre 1602 e 1611, quando a empresa Dutch East India Company passou a ser a primeira empresa publicamente negociável no mercado de ações de hoje, para arrecadar capital a empresa resolveu vender ações da empresa e pagar dividendos das cotas dos investidores. E a partir deste ponto outros países começaram da mesma maneira a criar empresas similares, começando assim o mundo dos mercados financeiros conhecidos nos dias de hoje (César Esperandio, 2020; Juliano Pinheiro, 2019).

O mercado financeiro pode ser definido como o universo onde ocorrem as operações de compra e venda de ativos financeiros, como valores mobiliários, mercadorias e câmbio, podendo ser tanto digital como físico, onde o valor é influenciado pela oferta e demanda do ativo. Com uma estrutura bastante complexa sendo constituída por diversas entidades, como bancos, corretoras, instituições de pagamento e alguns órgãos do governo. Tendo como principal função aproximar os investidores e os tomadores de recursos, ou seja, aproximação entre os vendedores e compradores.

2.2 Mercado de Ações

Segundo Pinheiro (2007) e Cruz (2011), o motivo do aparecimento do mercado de capitais foi um modo de oferecer ao mercado de crédito uma forma para se manter os recursos financeiros em condições necessárias em relação a seu custo, prazo e sua exigência. Devido ao mercado de capitais, foi possível a criação da poupança privada e a capacidade da formação de uma sociedade pluralista, onde a participação pode ou não ser conjunta, que colaboram de modo significativo para o desenvolvimento econômico de um país.

O mercado de capitais pode ser definido como segmento do sistema financeiro res-

ponsável por intermediar negociações entre quem precisa captar recursos para financiar projetos e quem deseja investir, através do fornecimento de títulos mobiliários capazes de oferecer liquidez para títulos emitidos por empresas, e certificando a capitalização que ocorre através das negociações entre as empresas e os investidores pela compra e venda de ações.

Uma empresa, quando inicia suas operações, precisa investir dinheiro no negócio. Esse capital é próprio, ou seja, vem dos sócios desta empresa, ou de terceiros. Fato é que, de alguma forma, é necessário captar recursos para tirar os planos do papel. Em compensação, investidores esperam que, depois de um tempo, tenha um retorno financeiro superior ao que foi investido. Ao aderir ao mercado de capitais, parte dos bens da empresa são transformados em ações para serem utilizadas em negociações, e são destas ações que se obtém os lucros, deste modo surge o conceito de mercado de ações (Pinheiro, 2007).

O mercado de ações é o ambiente em que ocorrem as negociações das ações, entre outros títulos. Sendo realizadas operações de compra e de venda das participações acionárias das empresas que possuem capital aberto pela bolsa de valores. Tomando a negociação de ações como exemplo, segundo Lopes (2012), esse mercado pode-se resumir em 3 etapas:

- Oferta pública inicial: A oferta pública inicial é o lançamento das ações de uma empresa no mercado de capitais, conhecida como Initial Public Offering (IPO).
- Mercado primário: O mercado primário é a fase inicial do mercado de ações, onde as ações de uma empresa são negociadas pela primeira vez. Todo o dinheiro captado com as primeiras vendas das ações é repassado à empresa.
- Mercado secundário: O mercado secundário é a próxima fase do mercado, onde os investidores que adquiriram ações no mercado primário podem, a qualquer momento, vender esses ativos para quem deseja comprá-los. A partir desse momento, as ações passam a ser negociadas entre os investidores, sem a participação direta da empresa. Assim sendo, o valor das transações de compra e venda da ação é repassado dos compradores para os vendedores.

Deste modo, a diferença entre o mercado primário e secundário é pelo fato que no mercado primário a empresa é quem obtém o lucro com a venda das ações, enquanto no mercado secundário o público investidor é quem lucra com sua comercialização, passando suas ações para outros investidores por meio das corretoras atuantes neste mercado.

2.3 Bovespa

A Bovespa é a sigla para Bolsa de Valores de São Paulo, uma entidade que se auto regula, com a supervisão da Comissão de Valores Mobiliários(CVM). Ela funciona como um mercado para negociar ações de empresas de capital aberto ou misto.Dentre suas principais funções estão a criação e administração de sistemas de negociação, compensação, liquidação, depósito registro para todas as principais classes de ativos, desde ações e títulos de renda fixa corporativa até derivativos de moedas, operações estruturadas e taxas de juro e de commodities, fiscalização das regras impostas e atuação de quaisquer outros direitos impostos pela lei brasileira.

Segundo a Bovespa, as bolsas de valores devem oferecer um ambiente responsável e seguro para a realização de negociações de ações, também chamadas de título mobiliários, por isso suas transações acontecem de modo transparente. As negociações de ações são realizadas em bolsas de valores, cabe a eles a responsabilidade de fiscalização e a disponibilização de recursos para que se possam ser feitos as operações de compra e venda de tais.

Conforme a Comissão de Valores Mobiliários(CVM), a bolsa de valores brasileira mais famosa é a Bovespa. Esta se encontra entre uma das maiores instituições financeiras de compra e venda de ações mundiais. Sendo nela que transcorre as maiores negociações de títulos e valores mobiliários das principais empresas e organizações brasileiras, como a Petrobrás, Itaú Unibanco, Ambev S/A, Vale, Banco do Brasil, Bradesco, dentre outras gigantes corporativas brasileiras.

Tanto a Bolsa de Valores de São Paulo, quanto as demais bolsas de valores são regidas pela interação de três entidades: os investidores, os gestores e os especuladores. Os primeiros são os que aspiram pela obtenção de lucros, pela compra de ações por preços mais baixos e pela venda a um preço mais alto do que quando foram compradas. Os segundos são os responsáveis pela administração das empresas que se encontram na bolsa de valores, e por último, os especuladores são aqueles que exploram a volatilidade do mercado de ações na expectativa de lucrar, mesmo com o risco de perdas (Pinheiro, 2007; Lopes, 2012).

2.4 Valores Mobiliários

Os valores mobiliários, também chamados de títulos mobiliários, são quaisquer títulos ou contratos de investimento coletivo ofertados publicamente, que podem ser de propriedade ou de crédito, que no ambiente de negociação na bolsa de valores possuem o mesmo significado. Deste modo, qualquer ação que for negociada na bolsa de valores corresponde simplesmente a um valor que representa uma porção de uma empresa que pode ser comercializada no mercado de ações e nas bolsas de valores.

As ações de uma empresa negociadas nas bolsas de valores ainda podem ser classificadas em dois tipos levando em conta os seus direitos e obrigações, são elas: as ordinárias e as preferenciais. Nesse caso, as ações que são classificadas como ordinárias garantem ao investidor dono daquela ação o direito a voto e participação nas decisões da empresa. Enquanto as ações consideradas preferenciais concedem ao seu dono a preferência na distribuição de dividendos ou dos valores devidos em caso de liquidação da companhia, sendo eles fixos ou mínimos (Pinheiro, 2007) (Lopes, 2012).

Além disso, as ações devem seguir um modelo de nomenclatura, que é especificado pela bolsa de valores da qual ela faz parte, sendo ela composta por quatros letras que identificam a qual empresa ela pertence, seguido de um número que identifica qual a sua classificação de negociação (Cruz, 2011). Ações que apresentam um dos números 3 ou 4, representam respectivamente ações ordinárias e preferenciais. Na tabela 2.1, pode-se observar algumas delas.

Na Bovespa existem mais de 400 empresas que representam os mais variados setores

da economia: financeiro; saúde; utilidade pública; bens industriais; entre outros, entre as principais estão: Itaú Unibanco (ITUB4), Bradesco (BBDC4), Vale (VALE3), Petrobras (PETR4), Petrobras (PETR3), Ambev (ABEV3), Banco do Brasil (BBAS3), B3 (B3SA3), entre diversas outras.

Código	Sigla	Classificação
PETR3	PETR	Ordinária
PETR4	PETR	Preferencial
ABEV3	ABEV	Ordinária
BBDC3	BBDC	Ordinária
ITUB4	ITUB	Preferencial

Tabela 2.1: *Exemplos de nomenclatura de uma ação (Cruz, 2011).*

Algumas empresas vendem apenas ações ordinárias, também existem aquelas que vendem somente ações preferenciais, mas existem as empresas que negociam os dois tipos de ação, que é o caso da Petrobras que é uma das maiores empresas brasileiras, e também uma das mais negociadas na Bovespa, como pode-se observar na Figura 2.1.

2.5 Precificação de uma ação

A precificação nada mais é do que determinar o valor justo de mercado de um ativo, ou seja o valor intrínseco deste, porém este valor é uma estimativa de seu preço. E em muitos casos este valor justo é consideravelmente maior ou menor pelo qual o ativo está sendo negociado, e são nesses momentos que surgem as oportunidades de comprar e vender os ativos. Neste sentido, um modo de se calcular esse valor justo, seria pelo serviço de Valuation ou Precificação de Ativos, que normalmente são realizadas por empresas de consultoria e corretoras.

O preço de uma ação negociada na bolsa de valores pode ser observado na cotação atual dela. A cotação de uma ação é composta de diversos dados diários referentes às operações de compra e de venda da ação (Lopes, 2012). Existem diversas maneiras de se coletar esses dados, um dos meios mais comuns utilizados no mercado são por meio de APIs disponibilizadas por diversas instituições financeiras, neste projeto foi utilizado a API da Yahoo Finance (Yahoo, 2022). Neste sentido, ao coletar os dados de uma alguma empresa, muitos desses dados não teriam utilidade alguma para o investidor, sendo assim os dados mais pertinentes seriam:

- Data: é o instante em que foi realizado a cotação de uma ação negociada na bolsa de valores
- Valor de abertura: é o preço inicial da ação no período, ou seja, o valor negociado na primeira operação do dia.
- Valor de fechamento: é o preço final da ação no período, ou seja, o valor negociado da última operação do dia.

- Preço máximo: é o valor mais alto que ação foi negociada no período.
- Preço mínimo: é o valor mais baixo que ação foi negociada no período.
- Negócios: é a quantidade de operações, tanto de compra como as de vendas, negociadas na bolsa de valores no período. A operação é independente da quantidade de ações negociadas, se for negociado a compra de cinco ações, então está é apenas uma operação.
- Títulos: é a quantidade de ações negociadas no período.
- Volume: é a quantidade total de capital acumulado nas negociações no período, ou seja, o total recebido pelos vendedores das ações ou o total pago pelos compradores.

Código	Cotação	Nome	Volume	Open	Close	High	Low	Data
PETR3	R$ 28,70	Petroleo Brasileiro SA Petrobras	R$ 9.641.500,00	R$ 28,95	R$ 28,70	R$ 29,25	R$ 28,42	07/02/2023 18:07:42
PETR4	R$ 25,62	Petroleo Brasileiro SA Petrobras Preference Shares	R$ 55.311.800,00	R$ 25,91	R$ 25,62	R$ 26,14	R$ 25,46	07/02/2023 18:07:42

Figura 2.1: *Cotações da Petrobras.*

Novamente, observando a Figura 2.1, percebe-se que os tipos de ação possuem cotações distintas, mesmo pertencendo à mesma empresa. Além disso consegue-se claramente distinguir a tendência da ação observando os dados presentes na tabela de cotação, basta analisar os valores de fechamento e valores de abertura, quando o valor de abertura é maior que o seu valor de fechamento podemos concluir que tem-se uma tendência de baixa no período, e da mesma forma se o valor de de fechamento for maior que o seu valor de abertura tem-se uma tendência de alta no período.

2.6 Investimento na Bolsa de Valores

O processo de investimento na bolsa de valores é dividido em 6 estágios, segundo Pinheiro (2007) e Lopes (2012), que podem ocorrer de duas maneiras: individualmente ou em conjunto. Estes estágios são:

1. Definição da instituição: o investidor deve escolher uma instituição financeira.
2. Abertura da conta: o investidor abre uma conta nessa instituição financeira.
3. Escolha do ativo: o investidor escolhe quais ativos e o modo que quer investir.
4. Realização da operação: o investidor realiza uma ordem para o investimento, fornecendo os detalhes da negociação para os corretores da instituição financeira.
5. Negociação na Bolsa de Valores: ocorre a realização da operação previamente ordenada.
6. Liquidação os ativos: a entrega do bem estabelecido no investimento, que futuramente é convertido em capital.

2.7 Análise de Mercado

O fator que determina o sucesso de um investidor no mercado financeiro é a sua capacidade de analisar todas as informações que de algum modo afetam o ativo ao qual está interessado, o que lhes permite que encontrem os momentos certos para a entrada e saída do mercado.

Um dos modos que muitos investidores acabam investindo é por meio da chamada especulação. A especulação pode ser definida como uma atividade característica do ser humano desde os primórdios da humanidade, visto que as escolhas tomadas são aquelas que melhor se adequam às suas necessidades, sejam elas pessoais, sentimentais ou profissionais. No mercado financeiro, a especulação pode ser definida como o ato de realizar uma transação com objetivo de lucrar no curto prazo com as variações de preços, motivado por expectativas e sentimentos próprios (Lopes, 2012).

Segundo Yamaguchi (2005), em 1696, Isaac Newton, já reconhecido pela proposição das leis do movimento e da gravitação universal, foi nomeado superintendente da Casa da Moeda Inglesa e participou decisivamente do bem-sucedido processo de reforma monetária daquele ano. Mas quando Newton se aventurou no mercado acionário, perdeu uma fortuna na quebra da bolsa da South Sea Bubble, como ficou conhecida a primeira grande queda (crash) do mercado inglês, em 1720. Newton por sua vez comentou: " Consigo calcular o movimento dos corpos, mas não a insanidade das pessoas". E mesmo passando-se mais de 280 anos da sua morte, a física moderna ainda propõe meios de se quantificar o grau de insanidade e ganância das pessoas, através do desenvolvimento de técnicas matemáticas a fim de se encontrar um meio de analisar o mercado financeiro.

No mercado financeiro existem três formas de se analisar o mercado de ações: a análise financeira, fundamentalista e técnica. A análise de financeira é o estudo das qualidades de uma empresa, baseando-se no acompanhamento dos demonstrativos financeiros dela. Já a análise fundamentalista, segundo Cruz (2011), tem como objetivo analisar sobre o futuro provável do mercado a partir do estudo de informações e dados capazes de qualificar a situação financeira de uma empresa, baseando-se em previsões ou múltiplos de mercado de ações de empresas similares, comparando os diversos múltiplos de empresas, sejam elas atuantes no mesmo segmento de mercado, o mesmo público alvo, ou até mesmo se possuem a mesma rentabilidade, em conjunto com notícias e informações relevantes. Enquanto a análise técnica se baseia no princípio de que os preços das ações se movem de acordo com tendências persistentes ao longo do tempo, ou seja, os preços e volumes históricos passados influenciam as flutuações futuras, de forma que uma vez encontrado essa tendência, é possível saber se prever de certa forma o seu comportamento.

Como neste projeto, as análises financeiras e fundamentalistas não serão estudadas, será apenas visto mais a fundo à análise técnica.

2.7.1 Análise Técnica

Segundo Nilson (2001), a análise técnica tem origem juntamente com a surgimento do mercado de arroz oriental cultivado no quintal da frente de Yodoya Keian, que na época era

conhecido como um comerciante de guerra para o daimyo[1] Toyotomi Hideyoshi, pelas suas habilidades extraordinárias em transporte, distribuição e precificação do arroz.Após alguns anos, outro comerciante conhecido como Munehisa Homma, criou o que foi chamado de Candlestick, como podemos observar na Figura 2.2, que é a forma mais antiga de representação gráfica de preço e uma das mais utilizadas para a análise técnica no mercado financeiro atual.

Figura 2.2: *Exemplos de candlesticks.*

Como foi discutido na seção anterior, a análise técnica difere das análises financeiras e fundamentalistas, visto que ela apenas se baseia no estudo das tendências vistas na série temporal de preço dos ativos, e não tem a intenção de entender a variação dinâmica dos preços das ações. Seu princípio tem fundamento no estudo da precificação de ações por meio de análises gráficas e de fórmulas matemáticas estatísticas e probabilísticas, parâmetros de cotação das ações, tendências futuras, dentre outros (Cruz, 2011).

De acordo com Lopes (2012), a teoria do jornalista Charles Dow, chamada teoria de Dow (Garry Berg, 2022), fundamenta todo o estudo moderno da análise técnica, propondo a análise das tendências presentes no mercado. Essa teoria se baseia considerando os eventos do passado, ou seja, os preços de fechamento anteriores, o volume de negociações e os padrões gráficos, com propósito de gerar uma média da série temporal de preços passados, que ficou conhecido como índice. Com isso diversas bolsas de valores de diversos países possuem índices que mostram o comportamento das ações.

2.7.2 Indicadores Técnicos

Os indicadores técnicos são equações estatísticas e probabilísticas que analisam uma série temporal de algum ativo e retornam algum tipo de resultado que auxiliam no processo

[1] Daimyo é um termo genérico usado para se referir aos poderosos senhores de terra no época do Japão pré-moderno.

de tomada de decisões do investidor (Junior, 2018). Existem quatro tipos de indicadores técnicos:

- Indicador de momentum: auxiliam a identificar a velocidade do movimento do preço, comparando a variação de preços em um determinado período de tempo, também podendo ser utilizado para a análise de volume.
- Indicador de tendência: medem a direção e força de uma tendência usando alguma forma de média de preço para estabelecer uma linha base.
- Indicador de volatilidade: medem a taxa de variação do movimento do preço, independente do sentido, e se baseiam na mudança do valores máximos e mínimos históricos dos preços.
- Indicador de volume: medem a força de uma tendência ou confirmam a direção de uma tendência, e se baseiam utilizando o cálculo de médias ou suavizando o volume bruto. Isso porque as tendências fortes voltam a ocorrer quando há uma alta no volume histórico.

Capítulo 3

Teoria moderna de portfólio

3.1 Introdução

No início da década de 1950, Harry Markowitz (1952) propôs o modelo de média-variância para otimização de portfólio, considerando o retorno como desejável e a variância como indesejável, visto que todo investimento apresenta um retorno esperado e uma variância (risco). Sua proposta criou uma nova perspectiva na teoria de construção de carteira de investimentos, que ficou conhecida como Teoria Moderna de Portfólio, que ainda hoje tem uma boa aceitação por parte dos investidores.

A Teoria Moderna de Portfólio, cuja origem provém da proposta do modelo de média-variância para otimização de carteira de investimentos apresentado por Harry Markowitz (1952), é um framework matemático para montar uma carteira de investimentos de tal forma que o retorno esperado é maximizado para um dado nível de risco. A teoria introduziu o risco e a diversificação do portfólio como fatores inerentes às decisões de investimentos, contrariando o senso comum da época, que era a concentração dos recursos no ativo de maior retorno esperado.

No entanto, Markowitz não podia levar em consideração apenas a matemática por trás, visto que um investimento não é apenas feito sozinho, mas sempre por um ser humano. Deste modo, considerou as seguintes premissas (Sanvicenete e Filho, 1988):

- um investidor nunca estará satisfeito com os resultados, se proposto a escolha entre dois portfólios de mesmo risco, sempre será escolhido o de maior retorno;
- um investidor sempre tenta evitar os riscos, se proposto a escolha de dois portfólios de mesmo retorno, sempre será escolhido o de menos risco;
- um investidor avalia um portfólio levando em conta o seu valor esperado e a variância das taxas de retorno;
- existe uma faixa de risco livre, que um investidor pode emprestar, assim como tomar emprestado;
- as taxas de negociação e impostos são irrelevantes;

- os investidores concordam sobre a distribuição de probabilidade das taxas retorno de ativos, o que garante a existência de um conjunto único de portfólios eficientes.

A partir dessas premissas então identificou o retorno sobre um investimento como o valor esperado ou a probabilidade do valor esperado dos retornos futuros de um dado ativo. Enquanto o risco, definiu como a variabilidade dos retornos possíveis em torno do retorno médio esperado, apresentando assim, a redução da variância (ou risco), como fator inerente às decisões de investimentos. Como foi discutido previamente, a variância é um fator indesejável, assim foi proposto um método de construção de carteiras que tivesse a menor variância possível. O que levou ao rompimento da concepção ingênua de diversificação da época, que assumia que quanto maior for o número de ativos investidos, menor seria o risco.

Conforme a teoria, o investidor não deve se preocupar com o risco de um ativo, mas com a colaboração do indivíduo ao todo, e a combinação destes riscos formariam uma curva, ao qual Markowitz denominou como fronteira eficiente, que seria o conjunto de carteira com o melhor desempenho levando em conta os riscos e retornos esperados. O cálculo desse risco, não só considera os riscos de cada ativo individual, mas também a correlação entre os ativos da carteira. E com base nessas idéias que a Teoria Moderna de Portfólios surgiu.

3.2 Cálculo do risco e retorno

No seu artigo (Markowitz, 1952), foi evidenciado a importância da diversificação em uma carteira de investimento, e expôs que "em portfólios envolvendo um grande número de ativos, a variância perde sua importância quando comparada com as covariâncias" (Markowitz, 1959), isso é demonstrado pela fórmula(3.1) da variância de um portfólio com investimento igual em cada ativo presente no portfólio. No caso, se for utilizado um número muito grande de ativos, pode-se observar que o primeiro termo da fórmula tende a 0, e sua variância tende à média das covariâncias entre os retornos de todos os ativos do portfólio:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{N^2} + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{i>1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{3.1}$$

onde:

σ_p^2 = variância do portfólio;

σ_i = variância do ativo i;

N = número de ativos;

w_i = o peso do ativo i no portfólio p;

w_j = o peso do ativo j no portfólio p;

σ_{ij} = covariância dos retornos dos ativos i e j.

Se usarmos o fato que a variância de R_i é σ_{ij}, em conjunto com um N suficientemente grande, é possível se obter uma carteira diversificada, e simplificando a fórmula(3.1) para:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{i>1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &= w^T C w \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde:

w = vetor de pesos que se somados devem igualar a 1;

w^T = transposta do vetor de pesos;

C = matriz NxN das covariâncias dos retornos dos ativos.

Isto demonstra que mesmo para N muito grande sempre existe uma variância residual no portfólio, e essa variância tende à média das covariâncias entre os ativos.

Além disso, o artigo (Markowitz, 1952) afirma que o retorno de um portfolio é:

$$R_p = \sum R_i \times w_i \tag{3.3}$$

onde:

R_p = retorno do portifólio p;

R_i = retorno do i-ésimo título;

w_i = o peso do portfólio no i-ésimo título.

Seja $\overline{x_i}$ o valor esperado do portfólio R_i. O retorno (R_p) como um todo é uma soma ponderada de variáveis aleatórias. E como o valor esperado de uma soma ponderada é a soma ponderada do valores esperados, temos que o retorno esperado E do portfólio como um todo é:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \overline{x_i} w_i \tag{3.4}$$

onde:

$\overline{x_i}$ = média de cada ativo i.

3.3 Fronteira Eficiente

O conceito de eficiência da carteira, ou seja, um conjunto de carteiras que apresentam o menor risco para cada nível de retorno (ou o maior retorno para cada nível de risco) dentro da faixa entre o menor e o maior risco permitido pelo investidor foi apresentado por Markowitz (1952). A curva é construída sob a suposição de que os retornos dos ativos envolvidos têm uma distribuição normal, assim como a carteira resultante de suas combinações, e ficou conhecida como fronteira eficiente, ou também por "Markowitz bullet", isso se deve ao fato do formato que a curva remete ao formato de uma bala, por ser uma curva hiperbólica ascendente.

De acordo com Markowitz (1952), o cálculo da fronteira eficiente pode ser realizado através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min \left(w^T C w \right) \tag{3.5}$$

para w no retorno esperado da carteira $R^T w$, mantendo a soma de todos os pesos igual a 1. Segundo Júnior e Farias (2018), para se resolver o problema(3.5), basta utilizar os multiplicadores de Lagrange para o portfólio w^* $(w_1^*, ..., w_N^*)$:

$$w^* = g + h\mu_m \tag{3.6}$$

onde, g e h são vetores $(N \times 1)$, tais que

$$g = \frac{1}{D}[B(\Omega^{-1}e) - A(\Omega^{-1}\mu)] \tag{3.7}$$

$$h = \frac{1}{D}[C(\Omega^{-1}\mu) - A(\Omega^{-1}e)] \tag{3.8}$$

onde:

$A = e'\Omega^{-1}\mu$

$B = \mu'\Omega^{-1}\mu$

$C = e'\Omega^{-1}e$

$D = BC - A^2$

Capítulo 4

Expoente de Hurst

4.1 Introdução

O expoente de Hurst, proposto por Hurst (1951) para uso em análise fractal (Mandelbrot e Ness, 1968), tem sido aplicado em diversos campos de pesquisa. Tornou-se recentemente popular na comunidade financeira em grande parte devido ao trabalho de Peters (1994). O expoente de Hurst fornece uma medida para a memória a longo prazo e a fractalidade de uma série temporal. Por ser robusto, com poucas suposições sobre o sistema subjacente, é de ampla aplicabilidade para análise de séries temporais. Os valores do expoente de Hurst variam entre 0 e 1. Com base no valor do expoente de Hurst, uma série temporal pode ser classificada em três categorias:

- $H = 0,5$ indica uma série aleatória.
- $0 < H < 0,5$ indica uma série anti-persistente.
- $0,5 < H < 1$ indica uma série persistente.

Uma série anti-persistente tem uma característica de "reversão da média", o que significa que um valor acima é mais provável seguido por um valor abaixo, e vice versa. A força da "reversão da média"aumenta à medida que o H se aproxima de $0,0$ Uma série persistente reforça a tendência, o que significa que a direção (supor para baixo em relação ao último valor) do valor seguinte é mais provavelmente a mesma que a do valor atual. A força da tendência aumenta à medida que H se aproxima de $1,0$. A maioria das séries cronológicas econômicas e financeiras são persistentes com $H > 0,5$.

Na previsão de séries temporais, a primeira pergunta que queremos responder é se as séries temporais em estudo são previsíveis. Se as séries cronológicas forem aleatórias, espera-se que todos os métodos falhem. Queremos identificar e estudar as séries temporais que tenham pelo menos algum grau de previsibilidade. Sabendo que uma série cronológica com um grande expoente de Hurst tem forte tendência, é natural acreditar que tais séries cronológicas são mais previsíveis do que aquelas com um expoente de Hurst próximo a $0,5$.

4.2 Cálculo e Análise R/S

O expoente de Hurst quantifica a tendência relativa de uma série temporal seja para regredir fortemente para a média ou se agrupar em uma direção. Segundo (Bo e Rasheed, 2004), o expoente de Hurst pode ser calculado pela análise R/S para uma série temporal $X = X_1, X_2, ...X_n$, que segue da seguinte forma:

1. Cálculo da média m

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.1}$$

2. Cálculo da média ajustada para a série Y

$$Y_t = X_t - m, \qquad t = 1, 2, \dots, n \tag{4.2}$$

3. Cálculo do desvio acumulativo da série Z

$$Z_t = \sum_{i=1}^{t} Y_i, \qquad t = 1, 2, \dots, n \tag{4.3}$$

4. Cálculo da série de alcance R

$$R_t = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) - \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_t), \qquad t = 1, 2, \dots, n \tag{4.4}$$

5. Cálculo do desvio padrão da série S

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} (X_i - u)^2}, \qquad t = 1, 2, \dots, n \tag{4.5}$$

   Seja u a média entre X_1 até X_t.

6. Cálculo da série de alcance redimensionada (R/S)

$$(R/S)_t = R_t/S_t, \qquad t = 1, 2, \dots, n \tag{4.6}$$

Observe que $(\text{R/S})_t$ é a média nos intervalos $[X_1, X_t]$, $[X_{t+1}, X_{2t}]$ até $[X_{(m-1)(t+1)}, X_{mt}]$ onde $m = \lfloor n/t \rfloor$. Na prática, o valor de t é escolhido para ser divisível por n, a fim de utilizar todos os dados para o cálculo.

Hurst (1951) expandiu a equação de Einstein e descobriu que (R/S) cresce proporcionalmente a lei de potência à medida que o tempo aumenta, que o levou para uma forma mais geral

$$(R/S)_t = c \times t^H \tag{4.7}$$

Onde:

c = é uma constante;

H = é o expoente de Hurst.

Para se estimar o expoente de Hurst H, pode ser feito um gráfico do $\log_2(R/S)$ pelo tempo $\log_2 t$, e calcular a inclinação dessa reta formada.

4.3 Ciclo ou memória de longo prazo na análise fractal

Para uma série aleatória, Annis e Lloyd (1976) derivaram uma fórmula (4.8) que expressava o valor esperado da análise R/S sem o viés para um n número de observações pequeno

$$E(R/S) = \frac{(n-0.5)}{n} X \left(n \times \frac{\pi}{2}\right)^{-0.5} X \sum_{r=1}^{n \cdot 1} \sqrt{(n-r)/r} \tag{4.8}$$

Onde r são inteiros no intervalo $[1, n-1]$.

Segundo Dmitriy Piskarev (2017), a fórmula (4.8) é válida apenas para $n \leq 20$. Para $n > 20$, deve se utilizar a fórmula (4.9)

$$E\left((R/S)_t\right) = \left(n \times \frac{\pi}{2}\right)^{-0.5} * \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-r)/r} \tag{4.9}$$

Com isso, conseguimos encontrar o valor esperado da seguinte forma:

1. Calcular o valor esperado e traçar o gráfico correspondente resultante de $\log(E(R/S))$ e de $\log(R/S)$ na base $\log N$;
2. Calcular a dispersão esperada a partir do expoente de Hurst pela fórmula:

$$Variance(H) = 1/N \tag{4.10}$$

   Onde:

   H é o expoente de Hurst;

   N é o número de observações da amostragem.

3. Comparar todos os coeficientes de Hurst obtidos através da estimativa de número de desvios padrão nos quais H é maior que $E(H)$. Quando o expoente é superior a 2, obtemos um resultado significativo.

De acordo com Peters (1994), a melhor maneira de se entender um ciclo é através da construção de gráfico de estatística V numa escala logarítmica a partir do logaritmo do

número de observações no subgrupo. A partir da análise do gráfico podemos avaliar os resultados da seguinte forma:

1. se ambos os eixos formarem uma linha horizontal, é um processo aleatório independente;
2. se forma um ângulo positivo ascendente, é um processo persistente;
3. se forma uma tendência de queda, é um processo antipersistente.

Na análise fractal, a memória refere-se ao período durante o qual o mercado se lembra do passado e considera seu impacto nos eventos atuais e futuros. Este período é chamado de profundidade de memória. Neste conceito, em certa medida, reside todo o poder e a especificidade da análise fractal. Para determinar a profundidade de memória, temos que analisar os gráficos do logaritmo de estatística V da seguinte forma:

1. Traçar uma de tendência em todos os pontos no gráfico;
2. Garantir que o gráfico não é horizontal;
3. Definir os picos de curva ou àrea de onde a função é máxima, e a partir desses pontos percebe-se se o gráfico é susceptível de apresentar ciclo;
4. Definir a coordenada X do gráfico em escala logarítmica e converter o número para uma fórmula compreensível do tipo

$$l = e^h \tag{4.11}$$

onde:

l é o comprimento do período

H é o comprimento do período em escala logaritmica;

5. Deve se manter todos os verdadeiros ciclos no mesmo período, mas com timeframes distintos como base.

Capítulo 5

Transformada de Fisher

5.1 Introdução

A Transformada de Fisher é uma técnica matemática comumente utilizada em análise técnica e engenharia financeira. Ela transforma quaisquer dados não lineares em uma distribuição tipo Gaussiana com média zero e desvio padrão igual a um. Essa transformação permite a identificação de padrões e tendências subjacentes em dados de séries temporais financeiras, como preços de ações, taxas de câmbio e preços de outros ativos.

A Transformada de Fisher é aplicada à série temporal de preços mapeando os dados originais em um novo conjunto de valores que são mais simétricos e menos propensos a discrepâncias extremas. Os dados transformados podem então ser analisados usando vários métodos estatísticos para identificar tendências, níveis de suporte e resistência e outros indicadores importantes do mercado. Ao fornecer uma representação mais precisa das tendências subjacentes nos dados, a Transformada de Fisher pode ser uma ferramenta útil para investidores que buscam tomar decisões de investimento informadas (Cory Mitchell, 2022).

5.2 Função de Fisher

A função de Fisher se baseia na suposição de que o preço faz pontos máximos locais ao longo do tempo, sempre existe um preço mínimo local entre dois máximos locais. Este é geralmente o comportamento habitual dos preços nos mercados financeiros, mesmo quando o número de intervalos de tempo entre dois pontos máximos varia. Com base nisso, usaremos uma função de transformação entre a função preço e uma função conhecida para descrever a função de probabilidade de onda quadrática 5.1 . Esta transformação é simplesmente uma semelhança entre as duas funções, quando o preço atinge um valor máximo, a função preço transformado atinge um valor máximo. Quando o preço atingir o valor mínimo, a função do modelo terá um ponto mínimo.

A função do modelo é conhecida e descrita pelas condições impostas a sua primeira derivada, como veremos a seguir. Há várias funções utilizadas na prática para realizar esta transformação de preços. Comum a todas estas funções é que elas são descritas pelo

intervalo [-1; 1] e têm o mesmo comportamento da primeira derivada: a raiz da primeira derivada no meio do intervalo (correspondente ao valor do preço mínimo), valores altos da primeira derivada no final deste intervalo (correspondente aos pontos de preço máximo no final do intervalo de tempo em questão), uma primeira derivada negativa em [-1; 0] (como o preço cai do ponto local máximo para o mínimo) e uma primeira derivada positiva no intervalo [0; 1] (como um aumento de preço repetido após o ponto local mínimo para o próximo ponto local máximo. Deste modo, a função de Fisher pode ser descrita como:

$$f(X) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+X}{1-X} \right) \tag{5.1}$$

onde:

ln é o logaritmo natural.

5.3 Cálculo da transformada de Fisher

A partir da função de Fisher 5.1 conseguimos calcular a transformada de Fisher, basta acompanhar os passos seguintes:

1. Escolher um período, aos quais serão aplicados a função de Fisher;
2. Normalizar os dados X para uma distribuição Gaussiana, e calcular a equação presente entre parênteses na fórmula 5.1;
3. Multiplicar por ln para cada entrada;
4. Multiplicar por $0,5$ os resultados anteriores;
5. Repetir o cálculo para cada final de período convertendo os para a distribuição Gaussiana;
6. Fazer a somatória dos valores obtidos.

Com isso, se colocarmos os resultados num gráfico, é possível observar a formação, do que é chamado de indicador gráfico. O indicador da transformada de Fisher consegue prever os pontos de inversão da tendência do preço, porém ele se comporta sem limites, o que significa que os extremos podem ser observados durante um longo período de tempo. O extremo é baseado no desempenho histórico do ativo em questão. Uma leitura extrema indica a possibilidade de uma inversão. Isto deve ser confirmado por uma mudança na direção da transformação de Fisher.

Capítulo 6

Análise e interpretação dos resultados

Neste estudo, foram realizados alguns experimentos a fim de descobrir a veracidade das teorias estudadas. Dentre os diversos testes realizados foram escolhidos os que mais se encaixam com a interpretação teórica vista nesse projeto.

Como foi mencionado no capítulo 2, o banco de dados utilizado foi do Yahoo (2022) em ambiente Python, de onde foram extraídas informações de diversos ativos tanto da bolsa Americana quanto da bolsa brasileira. Após a extração, foi feito o processamento dos dados, já que ao se extrair dados de um ativo é necessário filtrar as informações pertinentes ao estudo, como data, valor de fechamento, valor de abertura, dentre outros.

Com esses dados é possível começar a análise técnica, utilizando as teorias vistas nos capítulos anteriores. Se analisarmos os gráficos 6.1 e 6.2, eles formam uma parábola característica chamada Markowitz bullet, cujos limites são chamados de fronteira efetiva, onde temos a menor variação para um determinado valor esperado. Infelizmente, não foram realizados testes suficientes para garantir que o mesmo ocorra no mercado real.

Para realizar o teste para Hurst foram gerados 1000 ativos aleatórios com 1000 valores dentro de uma distribuição Gaussiana para esse teste, como podemos ver na figura 6.3. Percebe-se claramente que a concentração dos coeficientes de Hurst revolvem em torno de $0,5$, isso significa que as séries temporais que foram geradas aleatoriamente dentro de uma distribuição Gaussiana se comportam como se fossem aleatórios.

Já para o teste para Hurst no mercado real foram escolhidos os 90 ativos que compõem o índice Ibovespa, e para cada ativo foi calculado o expoente de Hurst para os valores de 2022, como pode ser observado na figura 6.4. Não é surpresa que os expoentes de Hurst resultantes dos índices, em sua grande maioria, se aproximam de 1, mostrando que eles seguem uma forte tendência, seja ela de subida ou de descida.

Enquanto para o teste da transformada de Fisher foi selecionada a ação da Apple, a ação foi convertida pela equação de Fisher em período de 10, como pode ser visto na figura 6.5. Pode-se observar que o indicador tem a sensibilidade de indicar as inversões de tendência.

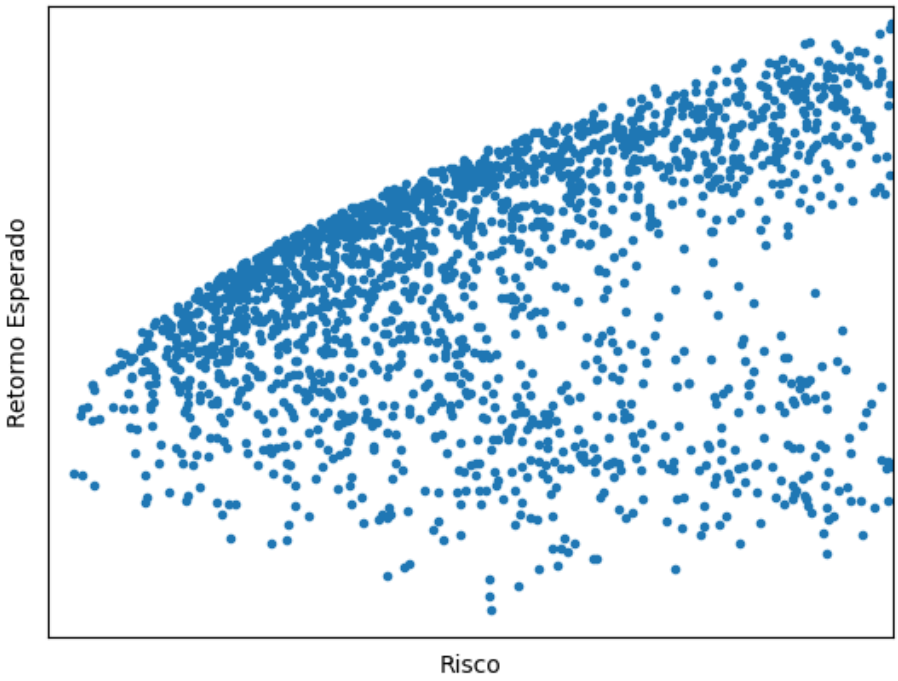

Figura 6.1: *Média e desvio padrão dos retornos de portfólios gerados aleatoriamente.*

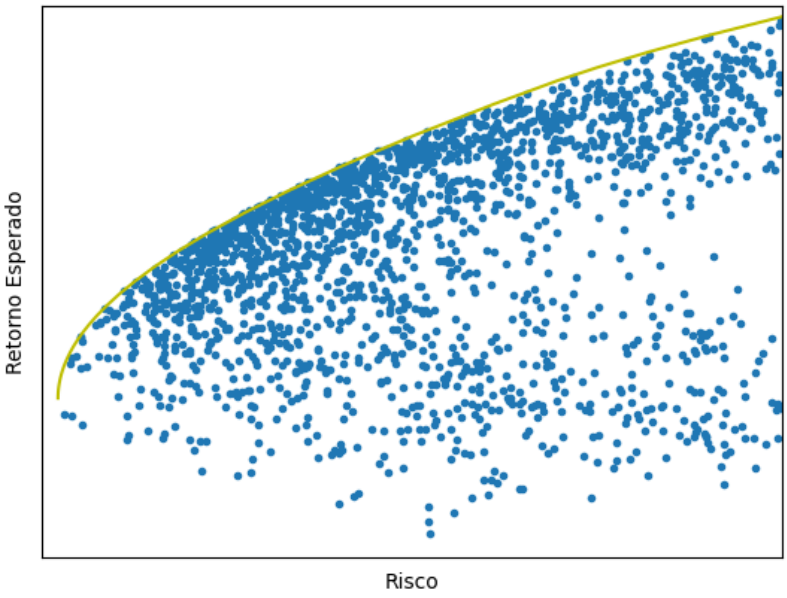

Figura 6.2: *Fronteira eficiente dos retornos de portfólios gerados aleatoriamente.*

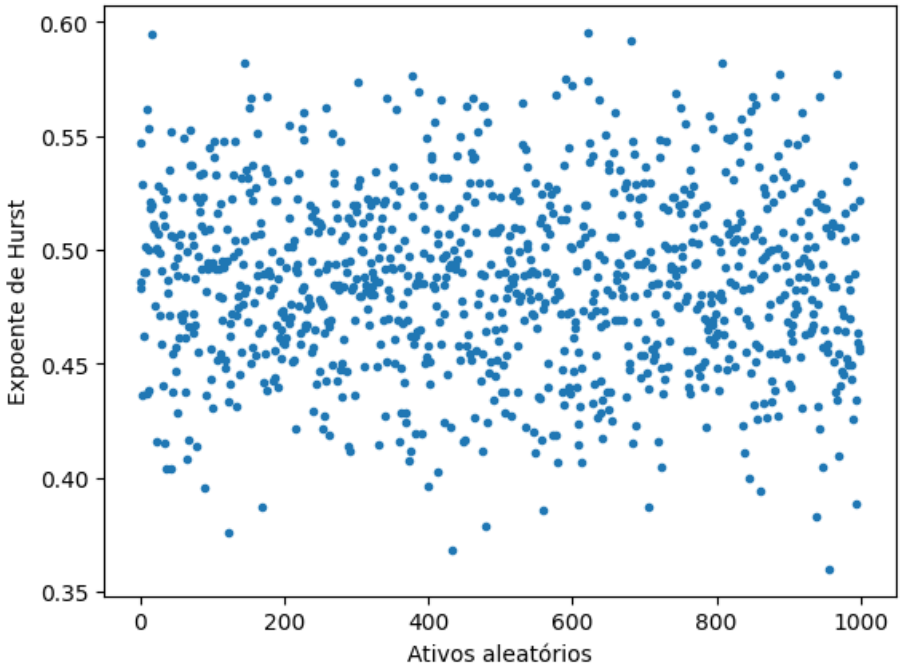

Figura 6.3: *Expoente de Hurst para ativos gerados aleatoriamente.*

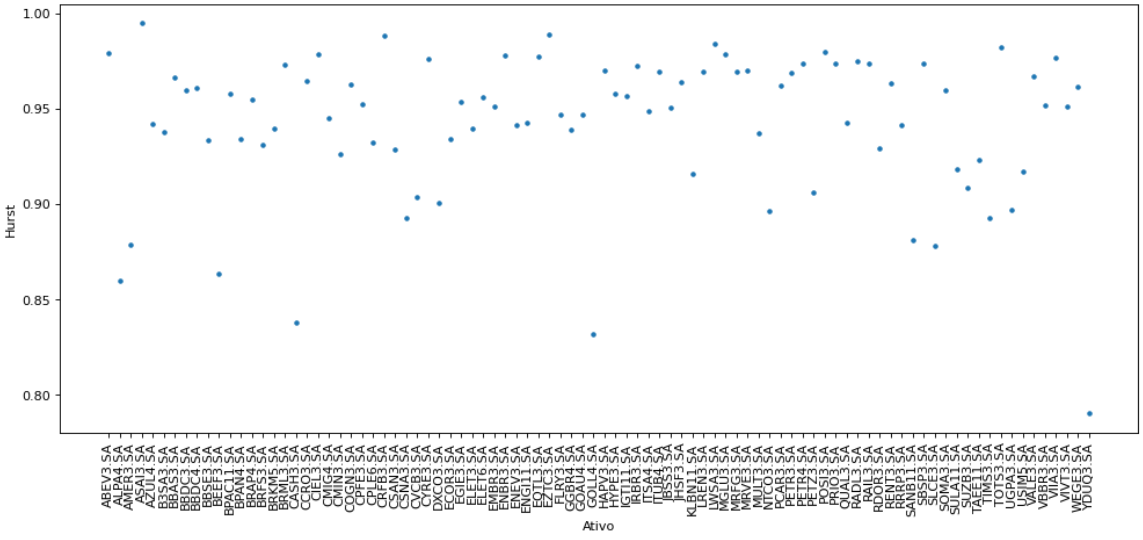

Figura 6.4: *Expoente de Hurst para os ativos que compõe o índice Ibovespa.*

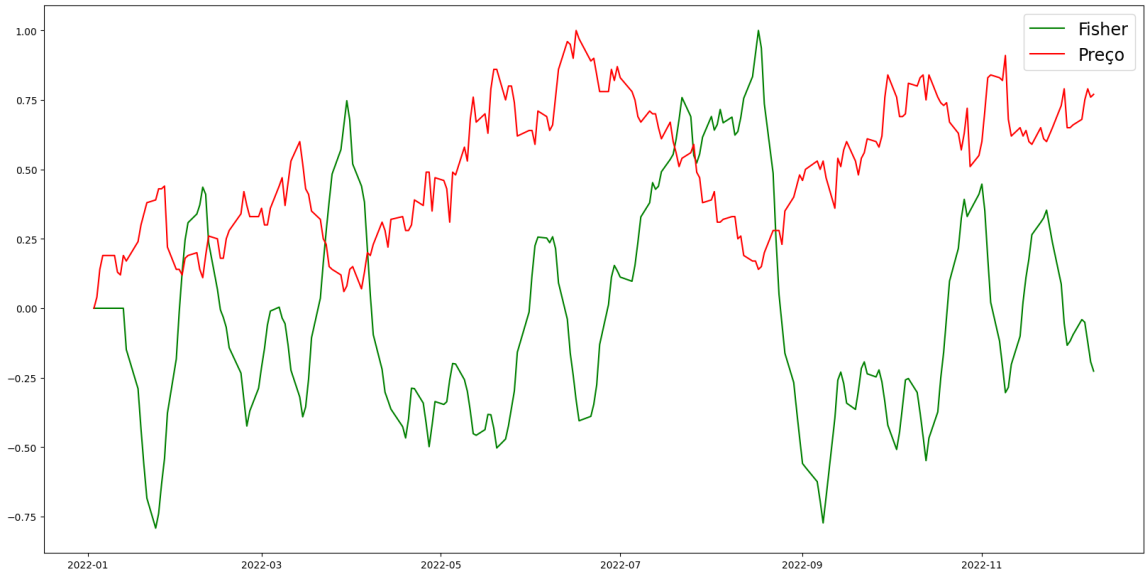

Figura 6.5: *Transformada de Fisher para AAPL no ano de 2022.*

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusão

Este projeto tinha dois objetivos principais, primeiramente, proporcionar o conhecimento básico de mercado financeiro para as pessoas que estão entrando no mercado, assim como desenvolver uma ferramenta que pudesse auxiliar o investidor na hora da tomada de decisões de investimento.

No decorrer do trabalho, mais estudos foram feitos, o que proporcionou não só o aumento de técnicas que podem ser implementadas, mas também de outros modos de investimento. Sendo que foram utilizadas três técnicas, das quais, uma foi baseada nos valores dos preços e sua variação (teoria moderna de portfólio), e duas que se baseiam diretamente na análise da aleatoriedade (expoente de Hurst e transformada de Fisher).

Durante o desenvolvimento da ferramenta ocorreram alguns imprevistos como a indisponibilização dos serviços de APIs e mudança de linguagem. Apesar dos empecilhos, o software foi desenvolvido na linguagem python, a qual contribuiu profundamente para seu término, sendo capaz de encontrar um portfólio ótimo de investimento, que pode ser descrito como a maximização do retorno esperado ou minimização do risco esperado num portfólio (veja a Seção 3.3). Por fim, como cada ferramenta desenvolvida pode tanto ser utilizada sozinha, quanto em conjunto com outras, o acréscimo de técnicas proporcionará diversas combinações que podem ser futuramente feitas e estudadas.

7.2 Futuro

Algumas das possíveis futuras implementações que podem ser feitas são:

- implementação de mais técnicas de índice gráfico, como médias móveis, dentre outros;
- implementação de sinais de compra e venda;
- previsão de preço de ação por meio de machine learning;
- uso de algoritmos genéticos;

- análise probabilística de candlesticks;
- manual de conhecimento de mercado financeiro;
- dentre outros.

Mesmo que ao fim deste trabalho estas ferramentas não tenham sido implementadas, as já disponibilizadas são mais que suficientes para auxiliar um investidor competente a tomar uma decisão embasado em dados.

Referências

[ANBIMA (Associação Brasileira dos Mercados Financeiros e de Capitais) 2021] ANBIMA (Associação Brasileira dos Mercados Financeiros e de Capitais). *Raio X do Investidor Brasileiro*. https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2021.htm. 2021 (citado na pg. 1).

[Annis e Lloyd 1976] Amber A. Annis e Emlyn H. Lloyd. "The expected value of the adjusted rescaled hurst range of independent normal summands". Em: *Biometrika* 63 (1976), pgs. 111–116 (citado na pg. 17).

[B3 2022] B3. *Número de investidores na B3 cresce mesmo em cenário de alta volatilidade*. https://www.b3.com.br/pt_br/noticias/numero-de-investidores-na-b3-cresce-mesmo-em-cenario-de-alta-volatilidade.htm. 2022 (citado na pg. 1).

[Bo e Rasheed 2004] Qian Bo e Khaled Rasheed. "Hurst exponent and financial market predictability". Em: *IASTED conference on FInancial Engineering and Applications*. Proceedings of the IASTED International Conference. Cambridge, Massachusetts, 2004 (citado na pg. 16).

[César Esperandio 2020] César Esperandio. *Como surgiram as ações? Conheça a história da Bolsa de Valores*. https://economia.uol.com.br/colunas/econoweek/2020/07/10/historia-da-bolsa.htm. 2020 (citado na pg. 3).

[Cory Mitchell 2022] Cory Mitchell. *Fisher Transform Indicator: Definition and How To Use It in Trade*. https://www.investopedia.com/terms/f/fisher-transform.asp. 2022 (citado na pg. 19).

[Cruz 2011] Jonathas J. A. Cruz. "Uma aplicação com redes neurais artificiais para previsão do comportamento do mercado de ações". Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Centro de Ensino Unificado de Teresina, Teresina. 2011 (citado nas pgs. vii, 3, 5, 6, 8, 9).

[Dmitriy Piskarev 2017] Dmitriy Piskarev. *Análise fractal dos mercados financeiros*. https://www.mql5.com/ru/articles/2930. 2017 (citado na pg. 17).

[Garry Berg 2022] Garry Berg. *Teoria de Dow (Teoria de Dow Jones) Explicada*. https://www.ifcmarkets.com/pt/ntx-indicators/dow-theory. 2022 (citado na pg. 9).

[Hurst 1951] Harold Edwin Hurst. *Long-term storage of reservoirs: an experimental study*. Vol. 116. Transactions of the American society of civil engineers, 1951, pgs. 770–779 (citado nas pgs. 15, 16).

[Juliano Pinheiro 2019] Juliano Pinheiro. *Qual a história da Bolsa de Valores?* https://julianopinheiro.com/historia-da-bolsa-de-valores/. 2019 (citado na pg. 3).

[Junior 2018] Manoel M. M. O. L. Junior. "Proposta de um modelo de predição da bolsa de valores usando uma abordagem híbrida". Diss. de mestr. São Luís, Brasil: Universidade Federal do Maranhão, 2018 (citado na pg. 10).

[Júnior e Farias 2018] Guimarães Júnior e Francisco R. Farias. "Proposta de um algoritmo para seleção de portfólio por meio de direcionadores de valor". Diss. de mestr. Pernanbuco, Brasil: Universidade Federal de Pernanbuco, 2018 (citado na pg. 14).

[Lopes 2012] Lucas Araújo Lopes. "Um sistema de inferência fuzzy como suporte a tomada de decisão para a compra e venda de ativos na bolsa de valores". Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Centro de Ensino Unificado de Teresina, Teresina. 2012 (citado nas pgs. 4–9).

[Mandelbrot e Ness 1968] B. B. Mandelbrot e J. W. van Ness. "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications". Em: *SIAM Review* 10 (1968), pgs. 422–437 (citado na pg. 15).

[Markowitz 1952] Harry Markowitz. *Portfolio Selection*. Vol. 7. Journal of Finance, 1952, pgs. 77–91 (citado nas pgs. 11–14).

[Markowitz 1959] Harry Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h. 1959 (citado na pg. 12).

[Nilson 2001] Steve Nilson. *JAPANESE CANDLESTICK CHARTING TECHNIQUES, SECOND EDITION: A Contemporary Guide to the Ancient Investment Techniques of the Far East*. 2ª ed. Prentice Hall Press, 2001 (citado na pg. 8).

[Peters 1994] Edgar E. Peters. *Fractal market analysis: applying chaostheory to investment and economics*. New York, Wiley: Wiley, 1994 (citado nas pgs. 15, 17).

[Pinheiro 2007] Juliano Lima Pinheiro. *Mercado de Capitais, Fundamentos e Técnicas*. 4ª ed. Atlas, 2007 (citado nas pgs. 3–5, 7).

[Sanvicenete e Filho 1988] Antonio Z. Sanvicenete e Mellagi Filho. *Mercado de capitais e estratégias de investimento*. São Paulo, São Paulo: Atlas, 1988 (citado na pg. 11).

[Yahoo 2022] Yahoo. *Yahoo Finance*. https://python-yahoofinance.readthedocs.io/en/latest/api.html. 2022 (citado nas pgs. 6, 21).

[Yamaguchi 2005] Patrícia Soyuri Yamaguchi. “DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DE UM INDEXO ECONÔMICO EM MERCADO EMERGENTE – BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO (IBOVESPA)”. Diss. de mestr. Rio Claro, Brasil: Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista, 2005 (citado na pg. 8).