

Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
Bacharelado em Ciência da Computação

Pedro Paulo de Queiroz Bambace

**A Conjectura de Hedetniemi:  
Contraexemplos e Resultados**

São Paulo  
Dezembro de 2021

# A Conjectura de Hedetniemi: Contraexemplos e Resultados

Monografia final da disciplina  
MAC0499 – Trabalho de Formatura Supervisionado.

Supervisor: Guilherme O. Mota

São Paulo  
Dezembro de 2021

# Resumo

A Conjectura de Hedetniemi afirma que o número cromático do produto categórico de dois grafos é sempre igual ao mínimo entre os números cromáticos dos grafos que o compõem. Neste trabalho são apresentadas conjecturas similares criadas ao longo dos anos com o objetivo de entender a natureza do problema e também como foi encontrado o contraexemplo que prova que a conjectura é falsa, junto com um segundo contraexemplo que refina o primeiro.



# Abstract

The Hedetniemi Conjecture states that the chromatic number of the categorical product of two graphs is always equals to the minimum between the chromatic number of the said graphs. In this project it is shown that similar conjectures have been introduce along the years with the objective of understanding the nature of the problem and also how a counterexample that proofs that the conjecture is false was found, together with a second counterexample that refines the first.



# Sumário

1	Introdução	1
2	Conjecturas Similares	5
3	O Contraexemplo de Shitov	9
4	O Contraexemplo de Xuding Zhu	13
5	Conclusão	17
	Referências Bibliográficas	19



# Capítulo 1

## Introdução

Grafos são estruturas matemáticas encontradas em diversas áreas de matemática e computação, com vários usos diferentes. Um tópico clássico e desafiador é a coloração de vértices, que pode ser aplicada para resolver problemas de escalonamento, entre outros.

Em 1966, o matemático Stephen T. Hedetniemi (5) propôs uma conjectura que ficou conhecida como conjectura de Hedetniemi. Neste trabalho são discutidos os contraexemplos recentemente encontrados e conjecturas similares com o intuito de entender a natureza do problema e expor esse avanço recente, mas antes de sequer enunciar a conjectura é necessário introduzir algumas definições básicas.

### Grafos

Um *grafo orientado*  $D$  é definido como um par ordenado  $(V, A)$  no qual  $V$  é um conjunto finito onde os elementos são chamados de *vértices* e  $A$  é um conjunto formado por pares de elementos disjuntos de  $V$ . Os elementos de  $A$  são chamados de *arcos* e os dois vértices de um arco são ditos adjacentes ou vizinhos. Se para todo arco  $(v, w)$  de um grafo orientado  $D$  o arco  $(w, v)$  também pertence a  $A(D)$  então dizemos que  $D$  é *simétrico*.

Um *grafo não orientado*  $G$  é definido como um par ordenado  $(V, E)$  no qual  $V$ , assim como em grafos orientados, é um conjunto finito onde os elementos são chamados de *vértices*, já  $E$  é um conjunto formado por conjuntos de 2 elementos de  $V$ . Os elementos de  $E$  são chamados de *arestas*, e os dois vértices de uma aresta são ditos adjacentes ou vizinhos. Chamamos de *versão não orientada* de um grafo orientado  $D$ , denotado por  $\overline{D}$ , o grafo orientado onde  $V(\overline{D}) = V(D)$  e  $\{x, y\} \in E(\overline{D})$  se, e somente se,  $(x, y) \in A(D)$  ou  $(y, x) \in A(D)$ . No resto deste trabalho os grafos não orientados serão referidos apenas por *grafos*.

Sejam  $G$  e  $H$  grafos. Dizemos que  $H$  é um subgrafo de  $G$ , denotado por  $H \subseteq G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . O mesmo pode ser dito para grafos orientados substituindo o conjunto de arestas pelo de arcos.

Chamamos de *ciclo* uma sequência de pelo menos 3 vértices onde cada um desses vértices é adjacente a seu sucessor e o último vértice é adjacente ao primeiro. Ciclo também pode se referir ao subgrafo formado por esses vértices e os arcos ou arestas que os conectam. É

chamado de *cintura* do grafo o tamanho do menor de seus ciclos.

Um grafo com  $n$  vértices que contém todas as arestas possíveis é chamado de *grafo completo* e denotado por  $K_n$ . Seja  $G$  um grafo, chamamos de *clique* um grafo completo que seja subgrafo de  $G$ . Um grafo orientado tal que existe exatamente um arco entre quaisquer dois vértices é chamado de *torneio*. Um torneio é chamado de *transitivo* se seus arcos definem uma relação de transitividade nos vértices dele e é denotado por  $T_n$ , onde  $n$  é o número de vértices do torneio. Neste trabalho usaremos  $V(T_n) = [n]$  e " $<$ " a relação de transitividade que define os arcos de  $T_n$ , onde  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

## Produtos

O *produto categórico*  $G \times H$  de dois grafos  $G$  e  $H$  quaisquer é um grafo definido pelos conjuntos  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$  e  $E(G \times H) = \{\{\{v, u\}, \{w, x\}\}; \{v, w\} \in E(G) \text{ e } \{u, x\} \in E(H)\}$ . Abaixo um exemplo de produto categórico de grafos:

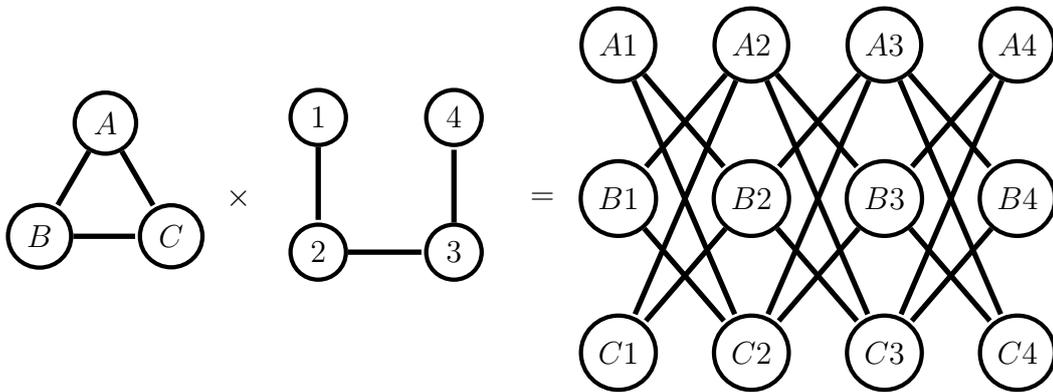


Figura 1.1: *Poduto Categórico de Grafos*

O produto categórico é conhecido também por outros nomes, mas por ser o principal produto deste trabalho será referido apenas por produto. Analogamente, o conjunto de arcos do produto de dois grafos orientados  $G \times H$  é  $A(G \times H) = \{((v, u), (w, x)); (v, w) \in A(G) \text{ e } (u, x) \in A(H)\}$ . Abaixo um exemplo de produto de grafos orientados:

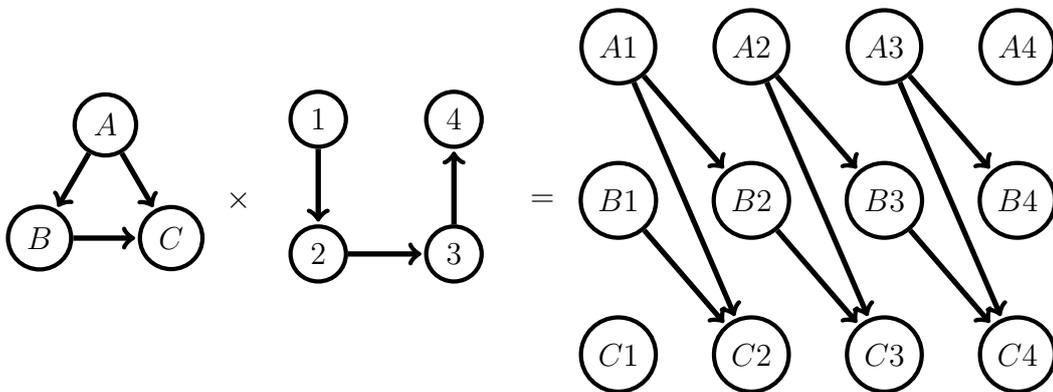


Figura 1.2: *Poduto de Grafos Orientados*

O *produto lexicográfico* dos grafos  $G$  e  $H$ , denotado por  $G \cdot H$ , e seu conjunto de vértices é o mesmo do produto categórico, ou seja,  $V(G \cdot H) = V(G) \times V(H)$ , já o conjunto de arestas é diferente,  $E(G \cdot H) = \{\{\{v, u\}, \{w, x\}\}; \{v, w\} \in E(G) \text{ ou } (v = x \text{ e } \{w, y\} \in E(H))\}$ . A seguir um exemplo de produto lexicográfico de grafos:

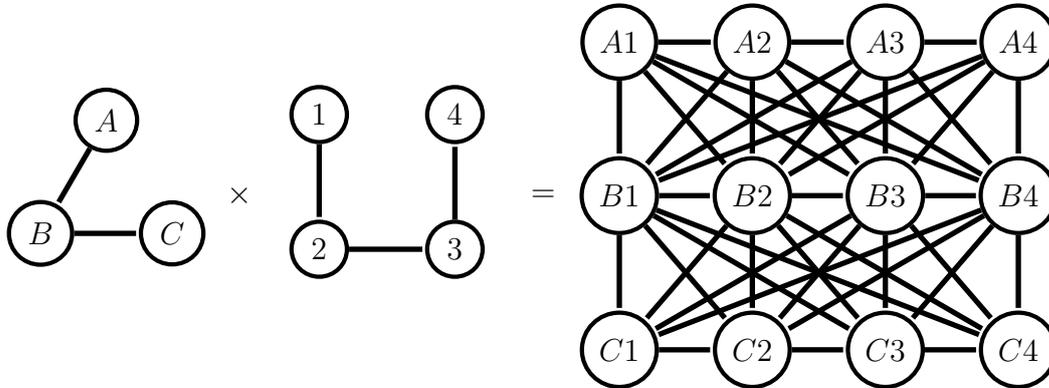


Figura 1.3: Produto Lexicográfico de Grafos

## Colorações

Para formalizarmos essa ideia corretamente, *coloração* de um grafo se refere a coloração dos vértices (se a coloração for das arestas ou arcos será dito explicitamente). Definimos então uma coloração com  $c$  cores, também chamada de  $c$ -coloração, como uma função  $f : V(G) \rightarrow [c]$ . Chamamos de *coloração própria* uma coloração  $f$  onde  $f(v) \neq f(w)$  para todos os  $v$  e  $w$  vizinhos. É comum que seja omitido o termo "própria" quando se referem a essa forma de coloração, mas isso não será feito neste trabalho devido à importância de colorações em geral.

O *número cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é o menor  $c$  tal que existe uma  $c$ -coloração própria de  $G$ . Já o *número cromático fracionário* de  $G$ , denotado por  $\chi_f(G)$ , é definido como  $\inf\{\chi(G \cdot K_q)/q; q \geq 1\}$ .

Com essas definições podemos então enunciar a conjectura de Hedetniemi:

**Conjectura 1.** Para quaisquer grafos  $H$  e  $G$ , temos  $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$

É fácil ver que  $\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\min\{\chi(G), \chi(H)\} = \chi(G)$ , e seja  $g$  uma coloração própria de  $G$  com  $\chi(G)$  cores. Veja que a coloração  $f$  de  $G \times H$  onde  $f(v, w) = g(v)$  para todo  $v \in V(G)$  e  $w \in V(H)$  é uma coloração própria de  $G \times H$ . Para todo par de vértices adjacentes  $(v, w)$  e  $(x, y)$  vale que  $f(v, w) = g(v) \neq g(x) = f(x, y)$ .

Assim para mostrar que a Conjectura de Hedetniemi é verdadeira bastaria mostrar que  $\chi(G \times H) \geq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ , e para mostrar que é falsa é necessário encontrar grafos  $G$  e  $H$  tais que  $\chi(G \times H) < \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ .

Mesmo assim a conjectura permaneceu mais de 50 anos sem ser provada ou refutada, até que finalmente em 2019 Yaroslav Shitov (8) apresenta um contraexemplo e em 2020 Xuding

Zhu (12) refina tal descoberta apresentando mais um contraexemplo. Neste trabalho será mostrado como os dois contraexemplos foram encontrados, desenvolvendo sobre as táticas usadas por ambos para encontrá-los, como por exemplo a coloração de grafos exponenciais e suas propriedades.

Além dos contraexemplos serão apresentadas conjecturas similares propostas durante os anos com o intuito de entender a natureza do problema e o que se sabe sobre tais conjecturas e aonde conseguimos chegar com essas informações, como por exemplo a função de Poljak-Rödl definida em (7) e a versão da conjectura de Hedetniemi para grafos orientados, para a qual foi encontrada um contraexemplo no mesmo artigo, concluindo com o panorama atual e o que ainda falta ser descoberto.

# Capítulo 2

## Conjecturas Similares

Em busca de uma prova ou contraexemplo para a Conjectura de Hedetniemi foram enunciadas várias conjecturas similares. Em 1981 Poljak e Rödl (7) escreveram um artigo que disserta sobre 3 delas: a Conjectura de Hedetniemi para grafos orientados, e a Conjectura Fraca de Hedetniemi, para grafos orientados e não orientados.

Se  $D$  é um grafo orientado definimos  $\tilde{A}(D) = \{(x, y); (y, x) \in A(D)\}$ ,  $D^{-1}$  e  $\tilde{D}$  os grafos orientados com  $V(D^{-1}) = V(\tilde{D}) = V(D)$ ,  $A(D^{-1}) = \tilde{A}(D)$  e  $A(\tilde{D}) = A(D) \cup \tilde{A}(D)$ , veja que para qualquer grafo orientado  $D$  vale que  $\tilde{D}$  é sempre simétrico.

Perceba que para qualquer grafo orientado  $D$ ,  $\overline{D} = \overline{\tilde{D}}$ , pois dois vértices são adjacentes em  $\tilde{D}$  se, e somente se, são adjacentes em  $D$ , dessa forma temos que  $\chi(D) = \chi(\tilde{D}) = \chi(\overline{D})$ , mas não é sempre que  $\chi(D \times F) = \chi(\tilde{D} \times \tilde{F})$ , mais especificamente  $\chi(D \times F) \leq \chi(\tilde{D} \times \tilde{F})$  pois  $D \times F \subseteq \tilde{D} \times \tilde{F}$ . Também temos que  $\overline{D \times F} = \overline{D} \times \overline{F}$ , para quais  $D$  e  $F$  grafos orientados simétricos, ou seja, a conjectura de Hedetniemi para grafos orientados, se verdadeira, implica que a Conjectura de Hedetniemi também é verdadeira, mas não o oposto. Então Poljak e Rödl (7) apresentam o seguinte contraexemplo que prova que a conjectura de Hedetniemi é falsa para grafos orientados:

Seja  $T'_4$  o grafo orientado onde  $V(T'_4) = V(T_4)$  e  $A(T'_4) = A(T_4) \cup \{(4, 1)\} - \{(1, 4)\}$ . Então  $\chi(T_4) = \chi(T'_4) = 4$ , mas  $\chi(T_4 \times T'_4) = 3$ , como é possível ver na figura abaixo (os arcos estão ocultos para que seja mais fácil a visualização):

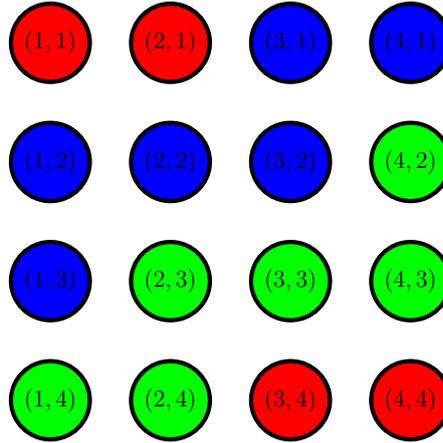


Figura 2.1:  $T_4 \times T'_4$

Inclusive é possível generalizar tal coloração para qualquer torneio transitivo  $T_n$  com  $n > 3$ , colorindo  $T_n \times T'_n$  com  $n - 1$  cores usando a seguinte coloração  $\phi$ :

- $\phi(1, 1) = \phi(2, 1) = \phi(n, n) = \phi(n - 1, n) = 1$ .
- $\phi(1, 3) = \phi(1, 2) = \phi(2, 2) = \phi(3, 2) = \phi(i, 1) = 2$  para todo  $i$  tal que  $n \geq i > 2$ .
- $\phi(i, k + 1) = \phi(k - 1, k) = \phi(k, k) = \phi(k + 1, k) = \phi(k + 1, j) = k$  para todo  $i, j, k$  tais que  $n \geq k > 2$ ,  $k - 1 \geq i \geq 1$  e  $k \geq j > 1$ .

Poljak e Rödl (7) definem a função  $f(r) = \min\{\chi(G \times H); G, H \text{ são grafos com } \chi(G) = \chi(H) = r\}$ , função que, por esse motivo, ficou conhecida como *função de Poljak-Rödl*, e a afirmação de que tal função tende ao infinito ficou conhecida como *Conjectura Fraca de Hedetniemi*, por ser menos restritiva que a conjectura original. Perceba que a conjectura original implica a nova, mas não o inverso, mas de qualquer forma eles não provam a conjectura, mas provam que caso  $f(r)$  não tenda a infinito  $f(r)$  é limitada superiormente por 16. Mas antes disso, similar à função  $f$ , eles definem a função  $g(r) = \min\{\chi(G \times H); G, H \text{ são grafos orientados onde } \chi(G) = \chi(H) = r\}$  e nesse caso provam que se  $g(r)$  não tende a infinito então é limitada superiormente por 4.

É fácil ver que as duas funções são crescentes, pois sejam  $G$  e  $H$  grafos que satisfazem  $\chi(G) = \chi(H) = r$  e  $f(r) = \chi(G \times H)$ , então existem  $G'$  e  $H'$  subgrafos de  $G$  e  $H$  respectivamente tal que  $\chi(G) = \chi(H) = r - 1$ , logo  $f(r - 1) \leq \chi(G' \times H') \leq \chi(G \times H) = f(r)$ . Concluindo então que a função tem um limitante superior ou tende ao infinito, analogamente o mesmo pode ser dito de  $g$ .

Para ver como eles chegaram no limitante superior para  $g$  vejamos algumas outras coisas primeiro.

## Desigualdade de Harner e Entringer

Seja  $N(n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . O Lema de Sperner (9) diz que o tamanho do maior conjunto de subconjuntos de  $[n]$ , tal que nenhum seja subconjunto de outro é  $N(n)$

Seja  $D$  um grafo orientado chamemos de  $\partial D$  o grafo onde  $V(\partial D) = A(D)$  e  $A(\partial D) = \{((v, x), (x, w)); (v, x), (x, w) \in A(D)\}$ .

Vejamos uma prova da seguinte desigualdade provada em 1972 por Harner e Entringer (3):

$$\min\{k; 2^k \geq \chi(D)\} \leq \chi(\partial D) \leq \min\{k; N(k) \geq \chi(D)\} \quad (2.1)$$

Primeiro vejamos que se  $\chi(\partial D) = k$  então existe uma  $2^k$ -coloração própria de  $D$ , o que implica que se não existe uma  $2^k$ -coloração própria de  $D$  então  $\chi(\partial D) > k$ , provando a desigualdade da esquerda em 2.1

Seja  $\phi$  uma  $k$ -coloração própria de  $\partial D$ . Então definimos uma  $2^k$ -coloração  $\psi$  de  $D$  tal que  $\psi(v) = c$  onde, considerando a representação binária de  $c$ , o  $i$ -ésimo algarismo de  $c$  é um 1 se existe um arco  $(v, w)$  onde  $\phi(v, w) = i$  e 0 caso contrário. Veja que de fato  $\psi$  é uma coloração própria pois se  $(v, w)$  é um arco qualquer de  $A(D)$  com  $\phi(v, w) = i$ , então  $\phi(w, x) \neq i$  para qualquer sucessor  $x$  de  $w$ . Dessa forma, o  $i$ -ésimo algarismo de  $\psi(v)$  e de  $\psi(w)$  são diferentes, fazendo com que  $\psi(v) \neq \psi(w)$ .

Já para ver que a desigualdade da direita em 2.1 é verdadeira, vejamos primeiro que  $N(k) = \max\{m; \chi(\partial K_m) = k\}$ , seja  $K_p$  um grafo orientado tal que  $\chi(\partial K_p) = k$  e  $\psi$  uma  $k$ -coloração própria de  $\partial K_p$ . Para todo vértice  $v$  de  $K_p$  definimos  $S_v = \{\psi(v, w); w \in V(K_p)\}$ . Perceba então que para dois vértices  $u$  e  $v$  quaisquer,  $S_u \not\subseteq S_v$  e vice-versa, pois caso contrário temos que  $\psi(u, v) = \psi(v, w)$  para algum  $w \in V(K_p)$ . Então podemos transformar o problema de achar  $\max\{m; \chi(\partial K_m) = k\}$  em achar o tamanho do maior conjunto formado por subconjuntos de  $[k]$  tal que nenhum seja subconjunto de outro, dessa forma usando o Lema de Sperner (9) chegamos que  $N(k) = \max\{m; \chi(\partial K_m) = k\}$ .

Dessa forma se  $\chi(D) = N(k)$ , então existe uma  $k$ -coloração própria de  $\delta D$ , ou seja,  $\chi(\partial D) \leq \min\{k; N(k) \geq \chi(D)\}$ . Seja  $\psi$  uma  $N(k)$ -coloração própria de  $K_{N(k)}$ ,  $\psi'$  uma  $k$ -coloração própria de  $\partial K_{N(k)}$  e  $\phi$  uma  $N(k)$ -coloração própria de  $D$ , definimos uma  $k$ -coloração  $\phi'$  de  $\partial D$  onde  $\phi'(v, w) = \psi'(\psi^{-1}(\phi(v)), \psi^{-1}(\phi(w)))$ . Veja que de fato  $\phi'$  é uma coloração própria pois como  $(\psi^{-1}(\phi(v)), \psi^{-1}(\phi(w)))$  e  $(\psi^{-1}(\phi(w)), \psi^{-1}(\phi(x)))$  são obviamente adjacentes em  $\partial K_{N(k)}$  então  $\phi'(v, w) = \psi'(\psi^{-1}(\phi(v)), \psi^{-1}(\phi(w))) \neq \psi'(\psi^{-1}(\phi(w)), \psi^{-1}(\phi(x))) = \phi(w, x)$ . Dessa forma provando a inequação 2.1.

## Limitantes Superiores para $f$ e $g$

Usando a desigualdade em (2.1) podemos ver como Poljak e Rödl (7) provam em seu artigo que se  $g$  não tende ao infinito então  $g$  é limitada superiormente por 4: Como  $g$  é crescente, sabemos que se  $g$  não tende ao infinito então existe um  $c$  e um  $r_0$  tal que  $g(r) = c$  para todo  $r \geq r_0$ . Seja então um  $r_1 = 2^{r_0}$  e tomemos  $D_1$  e  $D_2$  tal que  $\chi(D_1) = \chi(D_2) = r_1$ . Como  $r_1 > r_0$  então  $\chi(D_1 \times D_2) = c$ , e como, pela definição de  $r_1$ , temos  $r_0 = \min\{k; 2^k \geq r_1\} = \min\{k; 2^k \geq \chi(D_1)\} = \min\{k; 2^k \geq \chi(D_2)\}$ , então pela desigualdade da esquerda em (2.1) temos que  $r_0 \leq \chi(\partial D_1)$  e  $r_0 \leq \chi(\partial D_2)$ , ou seja, pela escolha de  $c$  e  $r_0$  temos que  $c \leq \chi(\partial D_1 \times \partial D_2) = \chi(\partial(D_1 \times D_2))$ . Então usando a inequação da direita em (2.1)

concluimos que  $\chi(D_1 \times D_2) > N(c-1)$ , ou seja,  $c > N(c-1)$  o que só é verdade para  $c \leq 4$ , provando que 4 é de fato um limitante superior de  $g$ , caso não tenda a infinito.

Para provar de fato que se  $f$  não tende a infinito, então  $f$  é limitada superiormente por 16 vejamos primeiro  $\chi(\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2) \leq \chi(D_1 \times D_2) \cdot \chi(D_1 \times D_2^{-1})$  para quaisquer grafos orientados  $D_1$  e  $D_2$ .

Dados grafos orientados  $D_1$  e  $D_2$  seja  $A' = A(D_1 \times D_2) \cup A(D_1 \times D_2^{-1})$ ,  $(v_1, w_1)$  um arco de  $D_1$  e  $(v_2, w_2)$  um arco de  $D_2$  então  $\{((v_1, v_2), (w_1, w_2)), ((v_1, w_2), (w_1, v_2)), ((w_1, v_2), (v_1, w_2)), ((w_1, w_2), (v_1, v_2))\} \subseteq A(\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2)$ , mas também temos que  $((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in A(D_1 \times D_2)$  e  $((v_1, w_2), (w_1, v_2)) \in A(D_1 \times D_2^{-1})$ , ou seja  $\{((v_1, v_2), (w_1, w_2)), ((v_1, w_2), (w_1, v_2))\} \in A'$  e consequentemente  $\{((w_1, w_2), (v_1, v_2)), ((w_1, v_2), (v_1, w_2))\} \in \tilde{A}'$  concluindo que  $\tilde{A}' \cup A' = A(\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2)$ .

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  grafos orientados quaisquer e  $f_1$  e  $f_2$  respectivamente uma  $p$ -coloração própria de  $D_1 \times D_2$  e uma  $q$ -coloração própria de  $D_1 \times D_2^{-1}$  onde  $p = \chi(D_1 \times D_2)$  e  $q = \chi(D_1 \times D_2^{-1})$ . Seja então  $\psi$  uma  $pq$ -coloração de  $\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2$  definida por  $\psi(v, w) = (f_1(v, w) - 1) \cdot q + f_2(v, w)$ . Vejamos que  $\psi$  é uma coloração própria, pois seja  $(v, w)$  e  $(u, x)$  dois vizinhos quaisquer em  $\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2$  como acabamos de ver  $(v, w)$  e  $(u, x)$  são adjacentes em  $D_1 \times D_2$  ou  $D_1 \times D_2^{-1}$ , ou seja  $f_1(v, w) \neq f_1(u, x)$  ou  $f_2(v, w) \neq f_2(u, x)$  o que pela definição de  $\psi$  implica que  $\psi(v, w) \neq \psi(u, x)$ .

Por último, então usando a prova do limitante superior de  $g$  foi provado que se  $f$  não tende ao infinito  $f$  é limitada superiormente por 16: Para fazer isso eles começam definindo  $h(D_1, D_2) = \max\{\chi(D_1 \times D_2), \chi(D_1 \times D_2^{-1})\}$  e  $h(r) = \min\{h(D_1, D_2); D_1, D_2 \text{ são grafos orientados com } \chi(D_1) = \chi(D_2) = r\}$  e de forma análoga a  $g$  temos que  $h$  tende ao infinito ou é limitada superiormente por 4. É fácil ver que  $h(r) \leq f(r)$ , pois o número cromático do produto de grafos orientados é sempre menor ou igual que o número cromático de suas versões não orientadas. Supondo que  $f$  é limitada superiormente então  $h$  é limitada superiormente por 4. Então sejam  $D_1$  e  $D_2$  grafos orientados tal que  $h(r) = \chi(D_1 \times D_2)$ , pela definição de  $f$  temos que  $f(r) \leq \chi(\overline{D}_1 \times \overline{D}_2) = \chi(\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2)$ , e como acabamos de demonstrar,  $\chi(\tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2) \leq \chi(D_1 \times D_2) \cdot \chi(D_1 \times D_2^{-1})$  e pela escolha de  $D_1$  e  $D_2$  temos que  $\chi(D_1 \times D_2^{-1}) \leq \chi(D_1 \times D_2) = h(r)$  logo  $\chi(D_1 \times D_2) \cdot \chi(D_1 \times D_2^{-1}) \leq h(r)^2$ , ou seja  $f(r) \leq h(r)^2 < 4 \cdot 4 = 16$ , provando que 16 é de fato um limitante superior de  $f$ , caso ela não tenda a infinito.

# Capítulo 3

## O Contraexemplo de Shitov

Em 2019, Shitov (8) publicou um artigo encontrando um contraexemplo para a conjectura de Hedetniemi, mas para compreender a descoberta é necessário primeiro definir o que é um grafo exponencial, uma coloração adequada e uma classe de cor  $v$ -robusta.

### Grafo Exponencial

Dado um grafo  $G$  chamamos de *grafo exponencial*  $\mathcal{E}_c(G)$  o grafo em que o conjunto de vértices é dado por todas as colorações de  $G$  com  $c$  cores, ou seja  $V(\mathcal{E}_c(G)) = \{f; f : V(G) \rightarrow [c]\}$ . Dois vértices  $f$  e  $g$  são adjacentes se, e somente se,  $f(v) \neq g(w)$  para quaisquer pares de vértices adjacentes  $v$  e  $w$  de  $G$ .

Veja que há duas propriedades que podemos concluir dos grafos exponenciais independente do grafo  $G$  usado:

- $\chi(\mathcal{E}_c(G)) \geq c$ , pois o conjunto das funções constantes é claramente um clique de tamanho  $c$ .
- $\chi(G \times \mathcal{E}_c(G)) \leq c$ , pois a coloração  $h$  definida por  $h(v, f) = f(v)$  usa  $c$  cores e é uma coloração própria. Basta ver que para um par de vértices quaisquer  $(v, f)$  e  $(w, g)$  de  $G \times \mathcal{E}_c(G)$  são vizinhos se, e somente se,  $v$  é adjacente a  $w$  e  $f$  é adjacente a  $g$ , o que pela definição de grafo exponencial implica que  $f(v) \neq g(w)$ .

Essas duas informações combinadas serão a chave para encontrar um contraexemplo para a conjectura de Hedetniemi, pois veja que basta encontrar um número  $c$  e um grafo  $G$  tal que tanto  $\chi(G) > c$  e  $\mathcal{E}_c(G) > c$  que então temos um contraexemplo. É exatamente isso que Shitov encontra.

### Coloração Adequada

Chamamos uma coloração  $f$  de *adequada* se ela é uma coloração própria com  $c$  cores de um grafo exponencial e para toda função  $g$  constante e  $v \in V(G)$  temos que  $f(v) = g(v)$ . Como as funções constantes formam um clique de  $c$  vértices, qualquer  $c$ -coloração do grafo

pode ser transformada em uma coloração adequada. Dito isso, perceba que em toda coloração adequada  $f$ , se  $f(g) = k$  então existe um  $v \in V(G)$  tal que  $g(v) = k$ , pois caso contrário a constante  $k$  e  $g$  seriam adjacentes e não poderiam ter a mesma cor.

## Classe de Cor $v$ -robusta

Seja  $G$  um grafo,  $v \in V(G)$  e  $f$  uma coloração adequada de  $\mathcal{E}_c(G)$ . Chamamos uma classe de cor  $b$  de  $v$ -robusta se para toda  $g \in V(\mathcal{E}_c(G))$  tal que  $f(g) = b$  temos  $g(v) = b$  ou  $g(w) = v$  com  $w$  adjacente a  $v$ . Para um grafo  $G$  com  $n$  vértices e uma  $c$ -coloração  $f$  adequada de  $\mathcal{E}_c(G)$  existe um vértice  $v \in V(G)$  tal que pelo menos  $c - \sqrt[n]{n^3 c^{n-1}}$  classes de cores são  $v$ -robustas.

Por fim, então definimos o contraexemplo. Erdős (2) provou que existe um  $G$  tal que a cintura de  $G$  é pelo menos 6 e  $\chi_f(G) > 3.1$ , ou seja, pela definição de coloração fracionária  $\chi(G \cdot K_q) > \chi_f(G) \cdot q > c$  com  $c = \lceil 3.1q \rceil$ , para qualquer  $q$ , como a função  $c - \sqrt[n]{n^3 c^{n-1}}$  tende ao infinito, podemos escolher um  $q$  grande o suficiente para que  $2q + 1 < c - \sqrt[n]{n^3 c^{n-1}}$ . No artigo de 2019, Shitov prova por absurdo que  $\mathcal{E}_c(G \cdot K_q) > c$ . A seguir vejamos uma demonstração:

Suponha que exista uma coloração própria  $f : V(\mathcal{E}_c(G \cdot K_q)) \rightarrow [c]$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $f$  seja adequada. Como visto anteriormente, temos que existe um  $v \in V(G)$  tal que mais de  $c - \sqrt[n]{n^3 c^{n-1}}$  cores sejam  $v$ -robustas, com  $n = |V(G)|$ . Considere então  $\mathcal{M} = \{u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_c\}$  um conjunto de colorações de  $G \cdot K_q$  onde:

- $u_t(v, i) = i$  para todo  $i$ .
- $u_t(w, i) = q + i$  para todo  $i$  e  $w$  adjacente a  $v$ .
- $u_t(w, i) = i$  para todo  $i$  e  $w$  a 2 vértices de distância de  $v$ .
- $u_t(w, i) = t$  para todo  $i$  e  $w$  a 3 ou mais vértices de distância de  $v$ .

Vejamos então que  $\mathcal{M}$  é um clique em  $\mathcal{E}_c(G \cdot K_q)$ , tomando  $u_t$  e  $u_s$  quaisquer, comparemos as cores dos vértices de  $G \cdot K_q$  com seus vizinhos:

- $u_t(v, i) = i$  e seus vizinhos são  $(v, j)$ ,  $(w, i)$  e  $(w, j)$  com  $w$  adjacente a  $v$  e  $j \neq i$ , que respectivamente recebem as cores  $j$ ,  $q + i$  e  $q + j$  em  $u_s$  que são todas diferentes de  $i$ .
- $u_t(w, i) = q + i$  com  $w$  adjacente a  $v$  e seus vizinhos são  $(v, i)$ ,  $(x, i)$ ,  $(w, j)$ ,  $(v, j)$  e  $(x, j)$  com  $x$  a 2 vértices de distância de  $v$  e  $j \neq i$ , que respectivamente recebem as cores  $i$ ,  $i$ ,  $q + j$ ,  $j$  e  $j$  em  $u_s$  que são todas diferentes de  $q + i$ . Perceba que de fato  $(y, j)$  não é vizinho de  $(w, i)$  quando  $y$  também é adjacente a  $v$  pois caso fossem  $(v, w, y)$  seria um ciclo em  $G$  contrariando o fato que a cintura de  $G$  é 6.
- $u_t(w, i) = i$  com  $w$  a 2 vértices de distância de  $v$  e seus vizinhos são  $(z, i)$ ,  $(x, i)$ ,  $(w, j)$ ,  $(z, j)$  e  $(x, j)$  com  $z$  adjacente a  $v$  e  $x$  a 3 vértices de distância de  $v$  e  $j \neq i$ , que

respectivamente recebem as cores  $q+i$ ,  $s$ ,  $j$ ,  $q+j$  e  $s$  em  $u_s$  que são todas diferentes de  $i$ . Perceba que de fato  $(y, j)$  não é vizinho de  $(w, i)$  quando  $y$  também está a 2 vértices de distância de  $v$  pois caso estivesse  $(v, z, w, y, z')$  seria um ciclo em  $G$  contrariando o fato de que a cintura de  $G$  é 6 (onde  $z'$  é o elemento adjacente a  $v$  e  $y$ ).

- $u_t(w, i) = t$  com  $w$  a 3 ou mais vértices de distância de  $v$  e seus vizinhos são  $(x, j)$ ,  $(z, j)$  com  $x$  a dois vértices de distância de  $v$  e  $z$  com 3 ou mais vértices de distância de  $v$ , que respectivamente recebem as cores  $j$  e  $s$  em  $u_s$  que são todas diferentes de  $t$ .

Então concluindo que  $\mathcal{M}$  é um clique com  $c - q \geq 3.1q - q = 2.1q$  vértices, podemos ver que, pelo princípio da casa dos pombos, existe um  $u_x \in \mathcal{M}$  tal que  $f(u_x) > 2q$ , pela definição de  $\mathcal{M}$ ,  $u_x(v) > 2q$  apenas quando  $u_x(v) = x$ , então como  $f$  é adequada vale que  $f(u_x) = x$ . Pela escolha que fizemos de  $q$  temos que  $|\{1, 2, \dots, 2q, x\}| = 2q + 1 < c - \sqrt[n]{n^3 c^{n-1}}$ , ou seja, conseguimos achar então um  $s$   $v$ -robusto tal que  $s \notin \{1, 2, \dots, 2q, x\}$ . Considere então a coloração  $u$  onde:

- $u(w, i) = x$  para todo  $w$  adjacente ou igual a  $v$ .
- $u(w, i) = s$  caso contrário.

Perceba que  $u$  é adjacente a  $u_x$  pois  $s$  não é usado em  $u_x$  e para todo  $(z, j)$  vizinho de  $(w, i)$  com  $w$  adjacente ou igual a  $v$  temos que a distância de  $z$  para  $v$  é de no máximo 2 vértices, ou seja,  $u_x(z, j) \leq 2q < x$ . Como  $s$  é  $v$ -robusto e  $u(w, i) \neq s$  para todo  $w$  adjacente ou igual a  $v$ , então  $f(u) \neq s$ , ou seja, como  $f$  é adequada temos que  $f(u) = x$ , mas dessa forma temos que  $f(u_x) = f(u)$ . Com isso chegamos numa contradição com  $u$  ser adjacente a  $u_x$ , concluindo então por absurdo que  $\chi(\mathcal{E}_c(G \cdot K_q)) > c$ , fazendo com que o grafo  $(G \cdot K_q) \times (\mathcal{E}_c(G \cdot K_q))$  seja um contraexemplo para a conjectura de Hedetniemi.



# Capítulo 4

## O Contraexemplo de Xuding Zhu

Após Shitov provar que a conjectura de Hedetniemi é falsa, Xuding Zhu (12) refinou tal prova encontrando um contraexemplo menor, utilizando grafos exponenciais apenas indiretamente através do homeomorfismo de grafos, definidos a seguir:

Dizemos que um grafo  $G$  é *homeomorfo* a  $H$  se existe uma função  $\Psi : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que se  $(x, y) \in E(G)$  então  $(\Psi(x), \Psi(y)) \in E(H)$ .

Como já visto na capítulo anterior, temos que  $\chi(G \times \mathcal{E}_c(G)) \leq c$ , então encontrando um  $H$  que é homeomorfo a  $\mathcal{E}_c(G)$  temos que  $\chi(G \times H) \leq c$ .

Dado um grafo exponencial  $\mathcal{E}_c(G)$  qualquer, para cada  $f \in V(\mathcal{E}_c(G))$ , definimos a *imagem* de  $f$  como  $Im(f) = \{f(x); x \in V(G)\}$ . Perceba que se  $Im(f) \cap Im(g) = \emptyset$  então  $(f, g) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ , pois para qualquer  $x, y \in V(G)$  adjacentes ou não,  $f(x) \neq g(y)$ .

A estratégia de Xuding Zhu (12) que veremos a seguir é encontrar grafos  $G$  e  $H$  tais que  $\chi(G) > c$ ,  $\chi(H) > c$  e que  $H$  é homeomorfo a  $\mathcal{E}_c(G)$ : Seja  $F$  um grafo com  $V(F) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  onde  $p$  é o menor número possível tal que  $F$  tenha cintura ímpar 7 e  $\chi_f(F) > 3 + \frac{4}{p-1}$ . O grafo  $F$  de fato existe, pelo provado por Erdős (2) em 1950. Seja  $q$  um número onde  $q \geq \frac{p-1}{2}$ ,  $G = F \cdot K_q$ , e  $H$  é o grafo onde  $V(H) = \{\phi\} \cup \{g_i; i \in [3q+2]\} \cup \{u_{i,t}; i \in [p], t \in [q+2, 3q+2]\} \cup \{\theta_{i,t}; i \in [p], t \in [2q+2, 3q+2]\}$  definido pelas seguintes adjacências:

- $g_i$  forma um clique para todo  $i \in [3q+2]$ .
- $\phi$  é adjacente a todo  $g_i$  com  $i > p$ .
- para cada  $i \in [p]$  e  $t \in [2q+2, 3q+2]$  temos  $\theta_{i,t}$  é adjacente a  $u_{i,t}$ ,  $\phi$  e todo  $g_j$  tal que  $t \neq j \neq i$ .
- $u_{i,t}$  é adjacente a  $g_j$  para todo  $j \neq t$  tal que  $j > 2q+1$ .
- o conjunto  $\{u_{i,t}; t \in [q+2, 3q+2]\} \cup \{g_i\}$  é um clique para todo  $i \in [p]$ .

Seja então  $c = 3q+2$ . A prova consiste em mostrar que  $\chi(G) > c$  e  $\chi(H) > c$ , mas  $\chi(G \times H) \leq c$ :

Pela definição de coloração fracionária é fácil ver que  $\chi(G) = \chi(F \cdot K_q) \geq q \cdot \chi_f(F) > q(3 + \frac{4}{p-1}) = q(3 + 2 \cdot \frac{2}{p-1}) \geq q(3 + \frac{2}{q}) = 3q + 2 = c$ .

Vejam agora que também  $\chi(H) > c$  por absurdo.

Suponha que  $f$  é uma  $c$ -coloração própria de  $H$ , sem perda de generalidade suponha que  $f(g_i) = i$ . Como  $\phi$  é adjacente a  $g_i$  para todo  $i > p$  temos que  $f(\phi) = i'$  para todo  $i \in [p]$ .

Como o conjunto  $\{u_{i',t}; t \in [q+2, 3q+2]\} \cup \{g_{i'}\}$  é um clique de  $2q+2$  vértices e  $f(g_{i'}) = i' \leq p \leq 2q+1$  então existe um  $t' \in [q+2, 3q+2]$ , tal que  $f(u_{i',t'}) \geq 2q+2$ , Mas como  $u_{i',t'}$  é adjacente a  $g_j$  para todo  $j \neq t'$  e  $j \geq 2q+2$  sobra apenas  $t'$  para colorir  $u_{i',t'}$ . Por fim veja que  $\theta_{i',t'}$  é adjacente a  $\phi$  que tem cor  $i'$  a  $u_{i',t'}$  que tem cor  $t'$  e a todo  $g_j$  com  $t' \neq j \neq i'$  que tem cor  $j$ , ou seja,  $\theta_{i',t'}$  é adjacente a  $c$  cores diferentes, chegando numa contradição.

Por último então vejamos que  $H$  é homeomorfo a  $G$ , para isso basta para cada  $v \in V(H)$  definir uma função  $v : V(G) \rightarrow [c]$ , e mostrar que de fato se  $(v, w) \in E(H)$  então  $v(x) \neq v(y)$  para todo  $(x, y) \in E(G)$ , em outras palavras  $H \subseteq G$ . vamos então definir tais colorações da seguinte forma:

- $g_i(v_s, j) = i$  para todo  $(v_s, j) \in V(G)$  e  $i \in [c]$ .
- $\phi(v_s, j) = s$  para todo  $(v_s, j) \in V(G)$ .
- $u_{i,t}(v_i, j) = j + 1$  para todo  $i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $q \geq j \geq i$ .
- $u_{i,t}(v_i, j) = j$  para todo  $i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $1 \leq j < i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = q + j + 1$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $2q \geq q + j \geq i$  e  $v_s$  é adjacente a  $v_i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = q + j$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $q < q + j < i$  e  $v_s$  é adjacente a  $v_i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = j + 1$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $q \geq j \geq i$  e  $v_s$  está a 2 vértices de distância de  $v_i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = j$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $1 \leq j < i$  e  $v_s$  está a 2 vértices de distância de  $v_i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = t - 1$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $t \leq i \leq p$  e  $v_s$  está a 3 ou mais vértices de distância de  $v_i$ .
- $u_{i,t}(v_s, j) = t$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [q+2, c]$  tal que  $1 \leq i < t$  e  $v_s$  está a 3 ou mais vértices de distância de  $v_i$ .
- $\theta_{i,t}(v_s, j) = t$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [2q+2, c]$  tal que  $i = s$  ou  $v_s$  é vizinho de  $v_i$ .

- $\theta_{i,t}(v_s, j) = i$  para todo  $s, i \in [p]$ ,  $j \in [q]$  e  $t \in [2q+2, c]$  tal que  $i \neq s$  e  $v_i$  não é vizinho de  $v_j$ .

Perceba que com essas definições as imagens dos vértices de  $H$  são as seguintes:

- $Im(g_i) = \{i\}$  para todo  $i \in [c]$ .
- $Im(\phi) = [p]$ , pois  $\phi(v_s, j) = s$  para todo  $(v_s, j) \in V(G)$  e  $s \in [p]$ .
- $Im(\theta_{i,t}) = \{i, t\}$  para todo  $i \in [p]$  e  $t \in [2q+2, c]$ .
- $Im(u_{i,t}) = ([2q+1] \cup \{t\}) - \{i\}$  para todo  $i \in [p]$  e  $t \in [q+2, c]$ , vejamos o porquê abaixo.

Vejamos que  $i \notin Im(u_{i,t})$ , pois em todos os casos  $u_{i,t}(v_s, j) > i$  ou  $u_{i,t}(v_s, j) < i$ . Vejamos primeiro que se  $(s = i$  ou  $v_s$  está a 2 vértices de distância de  $v_i)$  e  $j < i$  então  $u_{i,t}(v_s, j) = j < i \in [p]$ , disso concluímos também que  $[p-1] \subseteq Im(u_{i,t})$ , mas se  $j \geq i$  então  $u_{i,t}(v_s, j) = j+1 > i$ . Já se  $v_i$  é adjacente a  $v_s$  e  $q+j \geq i$  então  $i < u_{i,t}(v_s, j) = q+j+1 \leq 2q+1$ , ou seja  $[2q+1] \subseteq Im(u_{i,t})$  e como  $p-1 < 2q+1$  então  $[p] \cup [2q+1] = [2q+1]$ , mas se  $q+j < i$  então  $u_{i,t}(v_s, j) = q+j < i$ . Por fim se  $v_s$  e  $v_i$  estão a pelo menos 3 vértices de distância e  $t > i$  então  $i < u_{i,t}(v_s, j) = t$  logo  $t \in Im(u_{i,t})$ , mas se  $t \leq i$  então  $u_{i,t}(v_s, j) = t-1 < t \leq i$ . Concluindo assim que de fato  $Im(u_{i,t}) = ([2q+1] \cup \{t\}) - \{i\}$ .

Vejamos agora que se  $(v, w) \in E(H)$  então  $(v, w) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ :

- Como  $Im(g_i) = \{i\}$  para todo  $i \in [c]$  então  $\{g_i; i \in [c]\}$  é o clique formada pelas funções constantes.
- Como  $Im(\phi) = [p]$ , logo  $(\phi, g_i) \in E(\mathcal{E}_c(G))$  para todo  $g_i$  com  $i > p$ .
- Como  $Im(\theta_{i,t}) = \{i, t\}$  então  $(\theta_{i,t}, g_j) \in E(\mathcal{E}_c(G))$  para todo  $g_j$  com  $t \neq j \neq i$ , já que  $p < 2q+2$  então  $Im(\theta_{i,t}) \cap Im(\phi) = \{i\}$ , mas veja que se  $\theta_{i,t}(v_s, j) = i$  então  $i \neq s$  e  $v_i$  não é adjacente a  $v_s$  dessa forma pela definição de  $G$  se  $(v_r, k)$  é adjacente a  $(v_s, j)$  então  $v_s$  é adjacente a  $v_r$  ou  $s = r$  logo  $r \neq i$ , por tanto  $\phi(v_r, k) \neq i$ , concluindo que  $(\phi, \theta_{i,t}) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ . Já como  $Im(u_{i,t}) = ([2q+1] \cup \{t\}) - \{i\}$  temos que  $Im(\theta_{i,t}) \cap Im(u_{i,t}) = \{t\}$ , mas se  $u_{i,t}(v_s, j) = t$  então  $v_s$  e  $v_i$  estão a pelo menos 3 vértices de distância, ou seja,  $s \neq i$  e  $r \neq i$  para qualquer  $v_r$  vizinho de  $v_s$ , concluindo que  $\theta_{i,t}(v_r, k) \neq t \neq \theta_{i,t}(v_s, m)$  para todo  $m, k \in [q]$  com  $m \neq j$ , ou seja,  $(\theta_{i,t}, u_{i,t}) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ .
- Como  $Im(u_{i,t}) = ([2q+1] \cup \{t\}) - \{i\}$ , logo  $u_{i,t}$  é adjacente a todo  $g_j$  com  $j \neq t$  e  $j > 2q+1$ .
- Como  $i \notin Im(u_{i,t})$ , temos que  $(g_i, u_{i,t}) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ , falta mostrar que  $(u_{i,t}, u_{i,t'}) \in E(\mathcal{E}_c(G))$  para todo  $t \neq t'$  para concluirmos que  $\{u_{i,t}; t \in [q+2, 3q+2]\} \cup \{g_i\}$  é um clique em  $\mathcal{E}_c(G)$ , vejamos que isso de fato é verdade a abaixo.

Suponha por absurdo então que para um  $i$  qualquer existem  $t$  e  $t'$  tais que  $t \neq t'$  e  $(u_{i,t}, u_{i,t'}) \notin E(\mathcal{E}_c(G))$ , ou seja, existem  $a, j, j', v_s$  e  $v_r$  tais que  $a = u_{i,t}(v_s, j) = u_{i,t'}(v_r, j')$  e  $(v_s, j)$  é adjacente a  $(v_r, j')$ :

Primeiro suponha que  $v_s$  e  $v_r$  estão os dois a 3 ou mais vértices de distância de  $v_i$ , sem perda de generalidade suponha também que  $t > t'$  então se  $i \geq t$  temos  $u_{i,t}(v_s, j) = t - 1 > t' - 1 = u_{i,t'}(v_r, j')$  senão  $u_{i,t}(v_s, j) = t > t' \geq u_{i,t'}(v_r, j')$ .

Com isso podemos então concluir que  $v_s$  ou  $v_r$  está a menos de 3 vértices de distância de  $v_i$ , sem perda de generalidade suponha que esse vértice seja  $v_s$ .

Suponha que  $j = j'$ , então como  $(v_s, j)$  e  $(v_r, j')$  são adjacentes temos que  $v_s$  é vizinho de  $v_r$  e como  $v_s$  está a menos de 3 vértices de distância de  $v_i$ , temos que  $a \in \{j, j + 1, q + j, q + j + 1\}$ , supondo que  $v_r$  é adjacente a  $v_i$  como  $v_s$  é vizinho de  $v_r$  então umas das 3 afirmações seguintes é verdade:  $v_s$  é adjacente a  $v_i$  também,  $v_s$  está a 2 vértices de distância de  $v_i$  ou  $s = i$ , podemos descartar a primeira afirmação pois ela faz com que  $(v_i, v_r, v_s)$  seja um ciclo contrariando a escolha de  $F$ . Dessa forma então temos que  $u_{i,t'}(v_r, j') \geq q + j > j + 1 \geq u_{i,t}(v_s, j)$ , como  $v_s \neq v_r$  sobra que tanto  $v_s$  quanto  $v_r$  estão a 2 vértices de distância de  $v_i$ , mas dessa forma sejam  $v_x$  e  $v_y$  vértices adjacentes a  $v_s$  e  $v_r$  respectivamente e ambos vizinhos de  $v_i$ , então  $(v_i, v_x, v_s, v_r, v_y)$  ou  $(v_s, v_x, v_r)$  são um ciclo (depende se  $x = y$ ) contrariando a escolha de  $F$ .

Concluindo então que  $v_i$  não é adjacente a  $v_r$ , e analogamente, nem a  $v_s$ . Dessa forma sobra então a opção onde  $v_s$  está a 2 vértices de distância de  $v_i$  e  $v_r$  a 3 vértices de distância de  $v_i$ , mas se isso é verdade temos que  $u_{i,t}(v_s, j) \leq j + 1 < q + 1 < 2q \leq t' - 1 \leq u_{i,t'}(v_r, j')$ , mostrando que então  $j \neq j'$ .

Suponha que  $v_s$  e  $v_r$  são os dois adjacentes a  $v_i$ , sem perda de generalidade suponha também que  $j > j'$  então se  $j' \geq i$  temos  $u_{i,t}(v_s, j) = q + j + 1 > q + j' + 1 = u_{i,t'}(v_r, j')$  senão  $u_{i,t}(v_s, j) \geq q + j > q + j' = u_{i,t'}(v_r, j')$ , analogamente também temos que  $v_s$  e  $v_r$  não podem os dois pertencerem ao conjunto  $\{v_i\} \cup \{v_x; v_x \text{ a dois vértices de distância de } v_i\}$ .

Suponha então que  $v_r$  é adjacente a  $v_i$ , para qualquer  $j < q$  temos que  $u_{i,t}(v_s, j) \leq j + 1 \leq q < q + j' \leq u_{i,t'}(v_r, j')$ , já se  $j = q$  então  $u_{i,t}(v_s, j) \leq j + 1 = q + 1 < q + 2 \leq q + j' + 1 = u_{i,t'}(v_r, j')$ . Concluindo então que  $v_r$  está a 3 vértices de distância de  $v_i$ , como  $(v_s, j)$  e  $(v_r, j')$  são adjacentes temos que  $v_s$  deve estar a 2 vértices de distância de  $v_i$ . Como  $t' \geq q + 2 > q + 1 \geq j$  se  $i \geq t'$  temos que  $u_{i,t}(v_s, j) = j \leq q < q + 1 \leq t' - 1 = u_{i,t'}(v_r, j')$  senão  $u_{i,t}(v_s, j) \leq j + 1 \leq q + 1 < q + 2 \leq t' = u_{i,t'}(v_r, j')$ .

Esgotando assim, todas as possibilidades e concluindo que  $(u_{i,t}, u_{i,t'}) \in E(\mathcal{E}_c(G))$ , ou seja,  $\{u_{i,t}; t \in [q + 2, 3q + 2]\} \cup \{g_i\}$  é de fato um clique em  $\mathcal{E}_c(G)$ . Terminando assim a prova de que  $H \subseteq \mathcal{E}_c(G)$ , ou seja,  $\chi(H \times G) \leq c$ .

Assim é encontrado mais um contraexemplo para conjectura de Hedetniemi, mas dessa vez consideravelmente menor que o de Shitov (8), pois  $H$  neste contraexemplo tem  $c + 1 + p(q + 1) + p(2q + 1)$  vértices que são no máximo  $3q + 3 + 2q^2 + 3q + 14q^2 + 4q + 1 = 6q^2 + 10q + 5$  vértices, enquanto  $\mathcal{E}_c(G)$  tem  $c^{pq}$  vértices que são no máximo  $(3q + 2)^{2q^2 + q}$  vértices, Dessa forma é claro que o contraexemplo de Xuding Zhu (12) é menor que o de Shitov (8).

# Capítulo 5

## Conclusão

A conjectura de Hedetniemi foi proposta por Stephen T. Hedetniemi em 1966 e permaneceu em aberto por 53 anos, quando Shitov (8) encontrou um contraexemplo que mostra que a conjectura é falsa, como visto no Capítulo 3. Além disso, no Capítulo 4 deste trabalho foi apresentado o segundo contraexemplo encontrado, descoberto por Xuding Zhu (12). Apesar desses resultados há muito a ser investigado sobre a conjectura e o número cromático de produtos de grafos. No contraexemplo de Zhu é calculado que  $G$  tem 3403 vértices,  $H$  tem 10501 vértices e ambos têm número cromático maior que 125, enquanto existe uma 125-coloração própria de  $G \times H$ , ou seja, apesar de consideravelmente menor que o contraexemplo de Shitov, esse contraexemplo ainda é relativamente grande, e por isso pesquisadores ainda estão procurando contraexemplos menores, que possivelmente teriam mais aplicações.

Além disso, a conjectura fraca de Hedetniemi vista no Capítulo 2, que alega que a função  $f$  de Poljak-Rödl (7) tende ao infinito, ainda é um problema em aberto. Em 2020, Tardif e Zhu (10) provaram que a partir de algum  $n$  grande o suficiente  $f(n) \leq n - (\log n)^{\frac{1}{4} - o(1)}$ . Seguindo disso He e Wigderson (4) provam que para um  $\epsilon$  da ordem de  $10^{-9}$  e  $n$  suficientemente grande, temos  $f(n) \leq (1 - \epsilon)n$  e depois novamente Zhu (11) chega ao resultado de que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} \leq \frac{1}{2}$ . Todos esses limitantes superiores podem ser um passo na direção correta, mas não têm implicações sobre a conjectura fraca de Hedetniemi.

Após a prova vista no Capítulo 2, Poljak (6) refina o resultado chegando em que se  $f$  não tende ao infinito então  $f$  é limitada superiormente por 9. Dessa forma, se descobrirmos, por exemplo, que  $f(10) = 10$ , então teremos provado a conjectura fraca de Hedetniemi. O que é um segundo motivo pela busca de contraexemplos menores que os encontrados, ou seja, é interessante descobrir como  $f$  se comporta com  $n$  pequenos, mas pouco se sabe sobre isso, até hoje o resultado de El-Zahar em 1985 (1), que diz que o número cromático do produto de dois grafos com número cromático igual a 4 também é 4, é o maior caso conhecido onde  $f(n) = n$ , ou seja, sabemos apenas que  $f(n) \geq 4$  para todo  $n \geq 4$ , mas não se sabe se  $f(5) = 5$  ou  $f(5) < 5$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] **El-Zahar e Sauer(1985)** Mohamed El-Zahar e Nobert Sauer. The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4. *Combinatorica*, 5(2):121–126. Citado na pág. 17
- [2] **Erdős(1959)** Paul Erdős. Graph theory and probability. *Canadian Journal of Mathematics*, 11:34–38. Citado na pág. 10, 13
- [3] **Harner e Entringer(1972)** Charles C. Harner e Roger C. Entringer. Arc colorings of digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 13(3):219–225. Citado na pág. 7
- [4] **He e Wigderson(2020)** Xiaoyu He e Yuval Wigderson. Hedetniemi’s conjecture is asymptotically false. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 146:485–494. Citado na pág. 17
- [5] **Hedetniemi(1966)** Stephen T. Hedetniemi. Homomorphisms of graphs and automata. Relatório técnico, University of Michigan. Citado na pág. 1
- [6] **Poljak(1991)** Svatopluk Poljak. Coloring digraphs by iterated antichains. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 32(2):209–212. Citado na pág. 17
- [7] **Poljak e Rödl(1981)** Svatopluk Poljak e Vojtěch Rödl. On the arc-chromatic number of a digraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):190–198. Citado na pág. 4, 5, 6, 7, 17
- [8] **Shitov(2019)** Yaroslav Shitov. Counterexamples to Hedetniemi’s conjecture, 2019. Citado na pág. 3, 9, 16, 17
- [9] **Sperner(1972)** Emanuel Sperner. Ein satz iiber untermengen einer endlicher Menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):544–548. Citado na pág. 6, 7
- [10] **Tardif e Zhu(2019)** Claude Tardif e Xuding Zhu. A note on hedetniemis conjecture, stahlsconjecture and the Poljak-Rödl function. *The electronic journal of combinatorics*, 26(4):34–38. Citado na pág. 17
- [11] **Zhu(2020)** Xuding Zhu. A note on the Poljak-Rödl function, 2020. Citado na pág. 17
- [12] **Zhu(2020)** Xuding Zhu. Relatively small counterexamples to Hedetniemi’s conjecture, 2020. Citado na pág. 4, 13, 16, 17