Teoria de Jogos Imparciais

Enzo Hideki Nakamura

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bachalerado em Ciência da Computação

São Paulo
Janeiro de 2020

Teoria de Jogos Imparciais

Monografia final da disciplina
MAC0499 – Trabalho de Formatura Supervisionado.

Supervisor: José Coelho de Pina

São Paulo
Janeiro de 2020

Resumo

Jogos imparciais são aqueles em que a todos os jogadores é permitido realizar as mesmas ações ou movimentos, sendo o jogo do Nim o mais famoso deles. Apesar de parecerem simples jogos como outros quaisquer, sempre possuem (a partir de uma dada configuração inicial) uma estratégia vencedora para um dos jogadores, de modo que este sempre ganhe, não importando os movimentos de seu adversário. Este texto tem por objetivo estudar a combinatória por trás de tais estratégias.

Palavras-chave: jogos imparciais, nim, teoria de jogos.

Abstract

Impartial games are those in which all the players are allowed to make the same actions or movements, with the game of Nim being the most famous among them. Although they seem to be as simple and naive as any other game, they always have (from the initial configuration) a winning strategy for one of the competitors in such a way that he or she always wins. This work has the aim of studying the combinatorics behind such strategies.

Keywords: impartial games, nim, game theory.

Sumário

Lista de Figuras **1**

1 Introdução **3**

2 Conceitos básicos **5**

2.1 Um jogo simples 5

2.2 Posições vencedoras e perdedoras 6

2.3 Jogos imparciais 7

3 O Jogo do Nim **9**

3.1 Função XOR 10

3.2 Solução para um Nim genérico 11

3.3 Nim modificado 13

4 Teorema de Sprague Grundy **17**

4.1 Jogos e grafos 17

4.2 A função de Sprague-Grundy 18

4.3 Aplicações do teorema de Sprague-Grundy 20

5 Jogos em pilhas **25**

5.1 Periodicidade 25

5.2 Jogos octais 26

5.3 Espaços esparsos 28

5.4 Wythoff 29

6 Teorema Generalizado de Sprague Grundy **33**

6.1 Resultados de um jogo com laços 34

6.2 Valores de Nim com laços 37

6.3 Álgebra de valores de Nim com laços 38

7 Algoritmos **41**
7.1 Implementação do jogo do Nim 41
7.2 Programação dinâmica 42
7.3 Problemas de competições de programação 44

8 Comentários finais **51**
8.1 Conclusões 51
8.2 Apreciação pessoal 52

A Pré-requisitos matemáticos **53**
A.1 Grafos 53
A.2 Grupos 53

Referências Bibliográficas **55**

Lista de Figuras

2.1 Esquema das posições vencedoras e perdedoras na perspectiva do primeiro jogador . . . 6
2.2 Exemplo com 21 posições na perspectiva do primeiro jogador . . . 6
2.3 Esquema das posições vencedoras e perdedoras de um jogo imparcial com 3 posições terminais. . . . 7

3.1 Exemplo de uma posição inicial do Nim com pilhas de 2, 4 e 3 pedras 9
3.2 Exemplo da estratégia para duas pilhas com o mesmo número de pedras 10
3.3 Exemplo da estratégia para duas pilhas com números de pedras diferentes 10
3.4 Operação XOR entre os números 20 e 11 resultando em 25 . . . 10
3.5 Operação XOR entre os números 20, 12 e 21 . . . 11
3.6 5 pilhas de Nim com 23 (10111), 19 (10011), 11 (01011), 8 (01000) e 13 (01101) pedras que resultam em XOR diferente de zero . . . 12
3.7 Casos (I), (II) e (III) representando uma modificação no número de pedras da terceira, quarta e quinta pilha, respectivamente . . . 12
3.8 Exemplo das notações em um jogo de Nim com duas pilhas. . . . 14
3.9 Exemplo um pouco mais complexo das notações. . . . 14

4.1 Exemplo do Jogo da Subtração com 8 pedras e podendo remover 1, 2 ou 4 pedras, representado em forma de DAG . . . 18
4.2 Jogo imparcial representado em forma de DAG, cujas posições estão rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy . . . 19
4.3 Exemplo do jogo com as indicações dos movimentos que o cavalo pode fazer . . . 21
4.4 Tabuleiro do jogo do cavalo, cujas posições estão rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy calculadas indutivamente . . 22
4.5 Exemplo do jogo com dois cavalos. Como a função de Sprague-Grundy retorna 6 - um número diferente de zero - o jogo se encontra em uma posição vencedora. . . . 23
4.6 Algumas posições do jogo de Grundy rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy. . . . 24

5.1 84 primeiros valores de Sprague-Grundy do jogo Kayles . . . 28

6.1 Jogos imparciais com laços . . . 33
6.2 Jogo $G + *2$ com os conjuntos P_0 e P_1 explicitados. . . . 34
6.3 Posições de G + *2 rotuladas como perdedoras, vencedoras ou empate. 35

7.1 Tabuleiro do jogo de bolinhas de gude com os valores de Sprague-Grundy 46
7.2 Pilha de tamanho 8 e suas opções: pilhas de tamanhos 5, 4 e 3 e pares de pilhas de tamanhos 1 e 2. Casas proibidas foram marcadas de vermelho. 49

Capítulo 1

Introdução

Os jogos têm uma história que começa nos tempos antigos e são considerados uma velha forma de interação social. Em meio a tantos exemplos de jogos, há uma classificação chamada de jogos imparciais. Jogos dessa classe são aqueles jogados por dois jogadores, em que as opções de jogadas dependem apenas da posição - do estado - do jogo, ao invés de depender do jogador.

Dentre tais jogos imparciais, um dos mais importantes é o jogo do Nim, dito ser originário da China, mas ainda sem um consenso determinado. Suas primeiras menções na Europa datam do século XVI e apesar da razão de seu nome nunca ter sido explicitada, ele foi dado por Charles L. Bouton, da Universidade de Harvard, que também desenvolveu toda a teoria por trás do jogo. [wik (2019)]

Os estudos da combinatória por trás desses jogos foram bastante estigmatizadas num passado recente. O grande matemático G. H. Hardy mencionou "Problemas de xadrez *não são importantes*. As melhores coisas na matemática são tanto sérias, quanto bonitas. A *seriedade* de um teorema não está em suas consequências práticas, mas na importância das ideias matemáticas que ela conecta. A inferioridade de problemas de xadrez não está em suas consequências, mas em seu conteúdo." [Siegel (2013)]

Felizmente, as percepções têm mudado. Os estudos combinatórios de jogos nos trazem resultados e informações importantes de algo que jogamos. A matemática por trás de jogos se tornou séria com os avanços, e conta com a peculiaridade de ser divertida e cujo objeto de estudo usamos de forma descontraída. A significância por trás de problemas de xadrez está na forma como ela inspira o estudo de sua matemática, cujos resultados conectam até mesmo domínios diferentes.

Para a abordagem do conteúdo, o texto está dividido em oito capítulos mais uma seção de apêndice para consulta contendo pré-requisitos matemáticos que assume-se ser de prévio conhecimento do leitor. O próximo capítulo apresenta conceitos básicos para familiarização do leitor com jogos imparciais. O capítulo 3 traz o mais famoso dos jogos imparciais, o jogo do Nim, que serve de base para um forte teorema apresentado no capítulo 4. Em seguida, os capítulos 5 e 6 servem para generalizar os conteúdos vistos até o determinado ponto. No caso, o capítulo 5 - Jogos em pilhas - generaliza conceitos e teoremas para uma classe ampla de jogos, a qual o jogo do Nim está incluído. Já o capítulo 6, como o próprio nome sugere, generaliza o teorema de Sprague-Grundy para jogos imparciais mais complexos. O capítulo 7 foi inserido com uma intenção de apresentar aspectos mais práticos ao tema, e conta com algoritmos e implementações de programas. Por fim, o oitavo e último capítulo encerra o texto com comentários finais com um toque mais subjetivo sobre a elaboração do texto.

"*Eu costumava me sentir culpado em Cambridge por passar o dia todo jogando jogos, enquanto era esperado que estivesse estudando matemática. Então, quando descobri os números surreais, percebi que jogar jogos é matemática.*" - John Conway [Siegel (2013)]

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo, vamos abordar um pouco sobre alguns conceitos básicos e definições fundamentais para o entendimento do texto. Começaremos com um exemplo de jogo imparcial, analisando suas regras, os conceitos de posições, movimentos e estratégias, e ao final do capítulo abstraímos tais tópicos para obter as noções gerais de jogos imparciais.

2.1 Um jogo simples

Existe uma classe de jogos imparciais em que os jogadores retiram objetos (pedras, palitos, discos, etc.) do jogo, até que esses objetos acabem. Ela é chamada de jogos de *Takeaway*. Para começar, eis aqui as regras de um jogo bastante simples desta classe, chamado de Jogo da Subtração (do inglês, *Subtraction Game*).

1. É jogado entre dois jogadores que revezam entre si;

2. Consiste de uma pilha de 21 pedras;

3. A cada jogada, um jogador remove entre 1 a 4 pedras (não é permitido passar o turno sem remover pelo menos uma pedra);

4. Ganha o jogador que remover a última pedra da pilha.

Há alguma estratégia neste jogo? Como analisá-lo?

Diferentemente de jogos como o jogo-da-velha, ele possui uma estratégia para um dos jogadores de forma que este sempre vença, não importando o que seu adversário faça. Isso é um tanto intrigante no começo, então façamos a análise de casos mais simples.

Suponha que o jogo seja jogado com 5 pedras. Repare que o segundo jogador sempre vence nesse caso, pois o primeiro necessariamente deixa 1, 2, 3 ou 4 pedras. Agora, analisamos o caso com 6 pedras. Nesse caso, se o primeiro jogador deixar 5 pedras, ele (o primeiro) ganha pela análise anterior; e se deixar 2, 3 ou 4 pedras, ele perde. Como há um caso em que o primeiro jogador pode ganhar, obviamente ele escolherá tal opção. Então, para 6 pedras, há uma estratégia para o primeiro jogador vencer.

2.2 Posições vencedoras e perdedoras

O conceito de **posição** descreve o estado do jogo. Por exemplo, no jogo da subtração, uma pilha com 4 pedras é uma posição, enquanto uma pilha com 0 pedras é outra. O conceito de **jogada** é sinônimo de turno, enquanto que por **movimento** entende-se uma transição entre posições. Por exemplo, no jogo da subtração, uma transição da pilha com 10 pedras para uma pilha com 9 pedras seria um movimento, e uma transição da pilha com 17 pedras para uma pilha com 13 pedras seria outro. Os movimentos ocorrem durante as jogadas.

Chamamos de **posição terminal** aquela em que o jogador não pode efetuar movimentos; de **posição perdedora** aquela que é uma posição terminal ou que todo movimento leva a uma posição vencedora; e de **posição vencedora** aquela que possui pelo menos um movimento que leva a uma posição perdedora. Repare que os termos "vencedora" e "perdedora" aqui são da perspectiva do jogador a efetuar a jogada. Deste modo, dizemos que um jogador possui uma estratégia vencedora se ele começa em uma posição vencedora.

P	V	V	V	V	P	V
0	1	2	3	4	5	6

Figura 2.1: *Esquema das posições vencedoras e perdedoras na perspectiva do primeiro jogador*

No caso do nosso jogo com 6 pedras, as posições vencedoras e perdedoras são retratadas na Figura 2.1. Repare que a posição 5 é perdedora, pois todos as posições alcançáveis a partir dele são vencedoras. Enquanto a posição 6 é vencedora, pois alcança pelo menos uma posição perdedora, a 5.

P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Figura 2.2: *Exemplo com 21 posições na perspectiva do primeiro jogador*

Na figura 2.2, são retratadas as posições vencedoras e perdedoras para o jogo completo com 21 pedras. Conclui-se que o primeiro jogador possui uma estratégia para vencer o jogo, não importando o que seu adversário faça. Basta ele retirar uma pedra no começo, deixando seu adversário em uma posição perdedora, e ir efetuando movimentos para que seu adversário caia sempre nas posições perdedoras até a posição 0 (fim de jogo).

Note que há um padrão em que as posições perdedoras são sempre múltiplos de 5. Para um Jogo da Subtração genérico com n pedras e podendo retirar de 1 a m pedras por turno, as posições perdedoras são os múltiplos de $m + 1$. Além disso, repare que neste jogo, há apenas uma posição terminal, porém em jogos imparciais é possível haver múltiplas posições terminais.

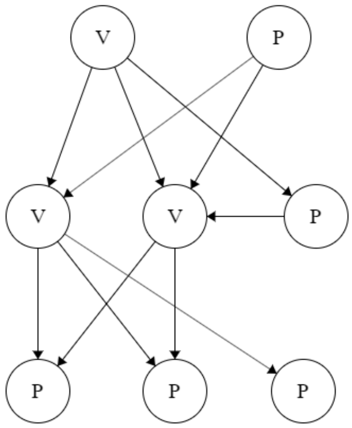

Figura 2.3: *Esquema das posições vencedoras e perdedoras de um jogo imparcial com 3 posições terminais.*

2.3 Jogos imparciais

O jogo que acabamos de ver é um exemplo da classe de jogos imparciais. Vamos generalizar alguns conceitos que valem para a grande maioria dos jogos dessa classe:

1. São jogados entre dois jogadores;
2. Existe um número finito de posições possíveis durante o jogo, e uma posição inicial;
3. Existem regras definidas que descrevem os movimentos que um jogador pode fazer a partir de uma posição para chegar em outra;
4. Os jogadores se alternam em suas jogadas;
5. Aquele que não puder efetuar um movimento perde;
6. As regras são tais que, em algum momento, um dos jogadores não poderá efetuar mais movimentos (o jogo é finito);
7. Ambos os jogadores sabem de todos os detalhes do jogo a todo momento, isto é, o jogo é de informação completa (não há informações privadas);
8. Não existem fatores aleatórios, como por exemplo jogar dados, embaralhamento, etc.
9. Todos os movimentos podem ser feitos pelos dois jogadores, isto é, não existem movimentos que apenas um dos jogadores pode efetuar.

A partir de agora, a menos que explicitado, jogos imparciais serão aqui referidos apenas como jogos.

Capítulo 3

O Jogo do Nim

O Jogo do Nim é o mais famoso da classe dos jogos de *Take-Away*. Em sua posição inicial, temos um número arbitrário de pilhas e em cada pilha algumas pedras.

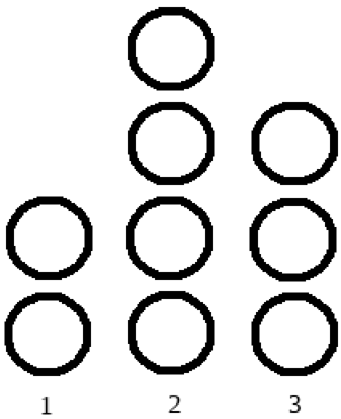

Figura 3.1: *Exemplo de uma posição inicial do Nim com pilhas de 2, 4 e 3 pedras*

Os jogadores se alternam realizando movimentos. Cada movimento consiste em escolher uma pilha e obrigatoriamente remover uma quantidade arbitrária de pedras dela. O vencedor é aquele que remover a última pedra do jogo.

À primeira vista, o Nim é um jogo como qualquer outro. Porém, analisando mais a fundo, percebe-se que ele possui a peculiaridade de que dada uma posição inicial é possível determinar uma estratégia para um dos jogadores de modo que ele sempre saia como vencedor. Este jogo e os teoremas por trás de sua estratégia que serão apresentados servem como base para análise de todos os demais jogos imparciais.

Passemos a analisar sua estratégia. Para uma única pilha, o jogo é trivial. O primeiro jogador sempre ganha, visto que ele pode simplesmente remover todas as pedras. Para duas pilhas, pode-se aplicar a estratégia do espelhamento: se as duas pilhas tiverem o mesmo número de pedras, o segundo jogador necessariamente ganha, pois em seu turno basta ele remover a mesma quantidade de pedras removidas pelo primeiro jogador no turno anterior, porém da pilha oposta.

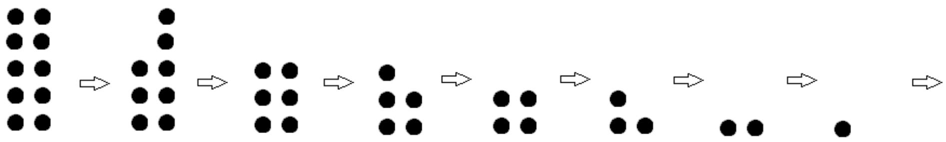

Figura 3.2: *Exemplo da estratégia para duas pilhas com o mesmo número de pedras*

Já se as pilhas tiverem um número diferente de pedras, o primeiro jogador pode simplesmente remover as pedras excedentes da maior pilha e o jogo ficará com duas pilhas de igual tamanho (caso anterior), e consequentemente o primeiro jogador acaba ganhando.

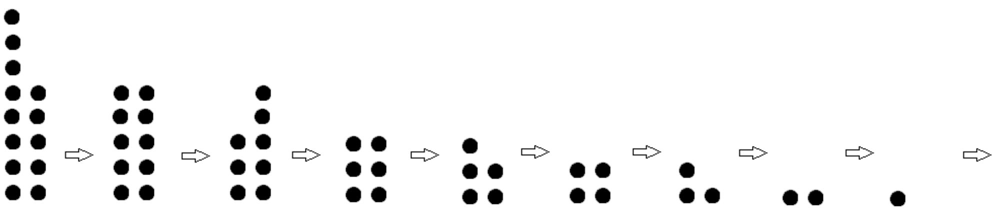

Figura 3.3: *Exemplo da estratégia para duas pilhas com números de pedras diferentes*

Para três pilhas ou mais, a estratégia do espelhamento já não faz sentido, porque não há uma "simetria" como no caso com duas pilhas. Porém, o jogo ainda possui uma estratégia vencedora, um pouco mais complexa e que será vista mais adiante. Antes disso, precisamos definir uma função que ajudará a descrever a estratégia.

3.1 Função `XOR`

A função `XOR` ($\oplus$) entre dois bits é uma operação binária definida como: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 1 = 0$. Entre dois números inteiros, a função retorna o resultado bit-a-bit. Já para 3 ou mais números, a função realiza a operação entre os dois primeiros, depois entre este resultado e o terceiro, e assim por diante.

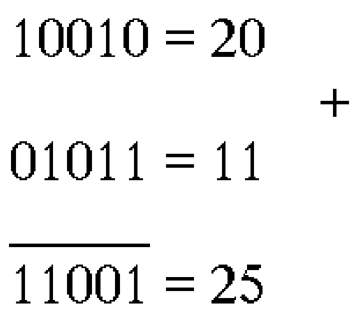

Figura 3.4: *Operação XOR entre os números 20 e 11 resultando em 25*

Podemos também considerar que a função XOR resulta na paridade do número de bits 1 em cada posição, sendo 0 em uma posição se a quantidade de bits 1 nessa posição é par, ou 1 caso contrário.

$$\begin{array}{ll}
10100 = 20 & \\
01100 = 12 & + \\
10101 = 21 & \\
\hline
01101 = 13 &
\end{array}$$

Figura 3.5: *Operação XOR entre os números 20, 12 e 21*

3.2 Solução para um Nim genérico

Com a função XOR definida, podemos elaborar uma solução para um Nim genérico, isto é, com 3 ou mais pilhas.

Lema 1. *Se o XOR entre os números de pedras nas pilhas for 0, alterar um e apenas um dos números faz com que o XOR deixe de ser 0.*

Prova: De fato, alterar um dos números implica que há uma mudança em pelo menos um de seus bits, o que por consequência altera o XOR (deixando de ser 0), pois a paridade de bits 1 em (pelo menos) uma posição se altera.

Lema 2. *Se o XOR entre os números de pedras nas pilhas não for 0, é possível alterar um dos números de forma que o XOR passe a ser 0.*

Prova: Se o XOR não for 0, considere o bit 1 na posição p mais significativa. Como este bit representa a paridade da quantidade de bits 1 na posição p dos n números, então existe pelo menos um número x no conjunto com bit 1 na posição p.

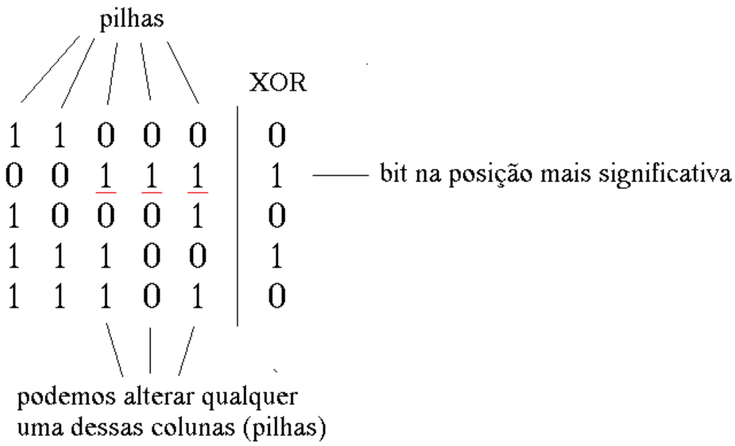

Figura 3.6: *5 pilhas de Nim com 23 (10111), 19 (10011), 11 (01011), 8 (01000) e 13 (01101) pedras que resultam em XOR diferente de zero*

Altere x para ser $x \oplus \texttt{XOR}$. Repare que essa alteração necessariamente diminui o número x.

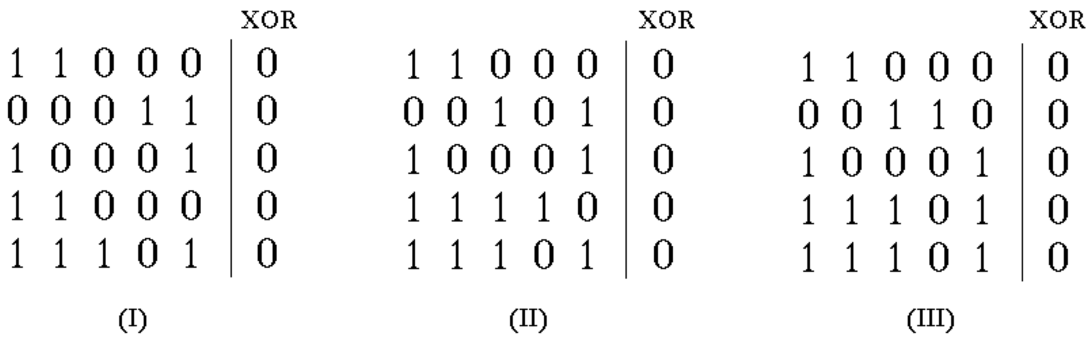

Figura 3.7: *Casos (I), (II) e (III) representando uma modificação no número de pedras da terceira, quarta e quinta pilha, respectivamente*

Desta forma, o `XOR` passa a ser 0, o que prova o lema.

Agora que temos os dois lemas, podemos propor uma estratégia vencedora para o Nim genérico.

Teorema 3. *(Teorema de Bouton) Para um jogo de Nim qualquer, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora quando o* `XOR` *entre os números de pedras iniciais das pilhas é diferente de zero, e o segundo possui uma estratégia vencedora quando tal* `XOR` *é zero.*

Prova: Basta considerar as posições com `XOR` zero como perdedoras, e as posições com `XOR` diferente de zero como vencedoras. De fato, pelo lema 1, um jogador em uma posição cujo `XOR` é zero ou foi derrotado (pois há zero pedras no jogo), ou necessariamente efetua um movimento que leva para uma posição cujo `XOR` é diferente de zero (posição vencedora), e portanto ele se encontra em uma posição perdedora. Já um jogador em uma posição cujo `XOR` é diferente de zero, pelo lema 2, consegue fazer um movimento que leve para uma posição com `XOR` igual a zero (posição perdedora), e desta forma ele se encontra em uma posição vencedora.

Sendo assim, a estratégia vencedora para o jogador em uma posição vencedora é sempre manter o oponente em uma posição perdedora (com `XOR` igual a zero). Como o número de pedras é finito, é garantido que em um determinado momento, tal oponente ficará sem pedras para serem removidas.

3.3 Nim modificado

Considere um jogo de Nim em que os jogadores, em suas jogadas, agora também podem colocar algumas pedras na pilha escolhida. Porém, apenas um número finito pré-determinado de pedras pode ser colocado no total (somando as pedras colocadas em todas as jogadas).

Apesar de não parecer à primeira vista, o modo de determinar o vencedor do jogo do Nim tradicional serve para este Nim modificado. Suponha um jogo G de Nim tradicional e suponha que um dos jogadores, digamos A, possui uma estratégia vencedora. Então, a mesma estratégia vale para o Nim modificado, com a adição de que nos momentos em que seu oponente B recoloca pedras em uma pilha, basta que na rodada seguinte A remova tais pedras, cancelando a jogada de B. Como o número de pedras que podem ser recolocadas é finito, o jogo acaba em algum momento.

Aplicação do Nim modificado

Antes de entrar neste tópico, algumas notações. Denotamos uma pilha de Nim tradicional com n pedras como $*n$. Esta notação é chamada de **nímero**. Um jogo imparcial $G = \{A, B, C, D, ...\}$ é aquele em que um movimento pode levar aos jogos imparciais A, B, C, D, etc.

Unindo as duas notações, temos que:

$*0 = \{\}$
$*1 = \{*0\}$
$*2 = \{*0, *1\}$
$*3 = \{*0, *1, *2\}$
...
$*n = \{*0, *1, ..., *(n-1)\}$

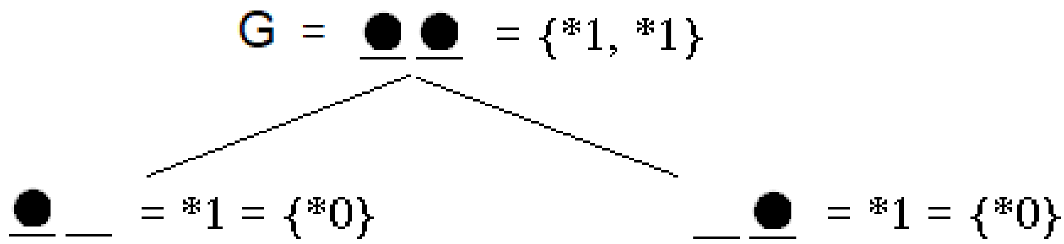

Figura 3.8: *Exemplo das notações em um jogo de Nim com duas pilhas.*

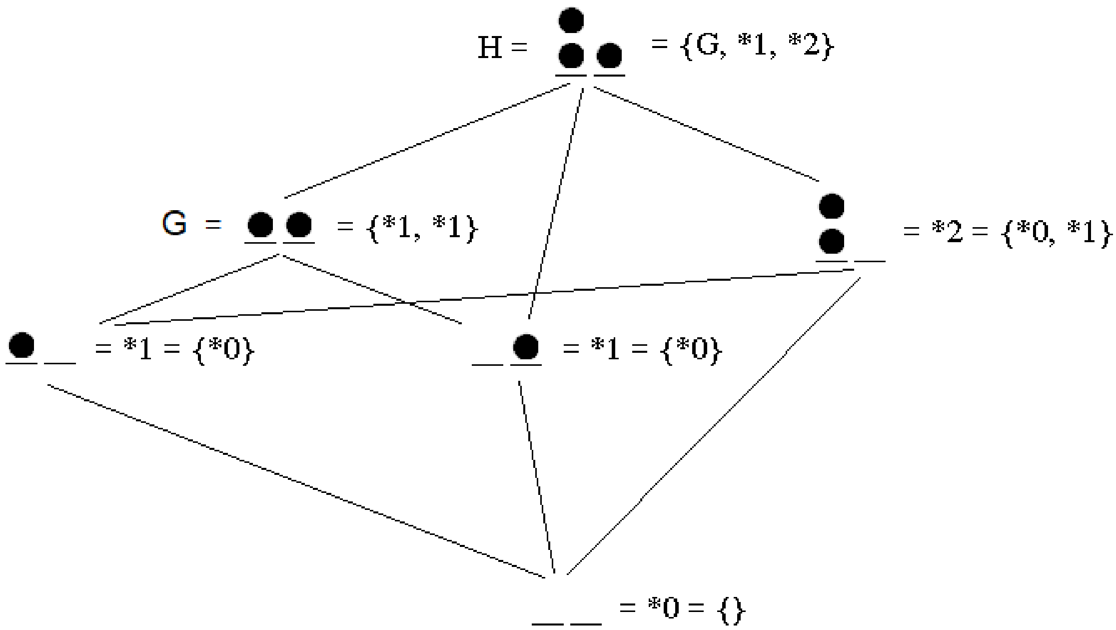

Figura 3.9: *Exemplo um pouco mais complexo das notações.*

Todos os jogos imparciais possuem uma estratégia vencedora para um dos jogadores. Podemos então dividir os jogos em duas classes: a dos jogos que possuem uma estratégia para o primeiro jogador e a dos jogos que possuem uma estratégia para o segundo. Dizemos então que dados dois jogos G e H, $G \sim H$ se G e H estão na mesma classe. [Siegel (2013)]

Sejam G e H dois jogos imparciais. O jogo imparcial $G + H$ é uma **composição** dos jogos G e H, que por sua vez são **componentes** de $G + H$. O jogo referente à composição é jogada da seguinte forma:

O jogador a efetuar a jogada escolhe um dos jogos e então efetua um movimento válido sobre a posição atual de tal jogo.

O jogo acaba da mesma maneira que um jogo convencional (quando o jogador, em sua jogada, não conseguir realizar movimentos). Isto somente acontece quando não há componentes em que ele pode efetuar um movimento válido.

Sejam G e H dois jogos imparciais. Dizemos que $G = H$ (G é **equivalente** a H), se $G + K \sim H + K$, para todo jogo imparcial K.

Agora, considere um jogo imparcial $G = \{*0, *1, *2, *3, *7, *8, *10\}$. Repare que este jogo pode ser considerado uma pilha de Nim de tamanho 4, em que é possível colocar pedras na pilha de forma que ela fique com 7, 8 ou 10 pedras. Porém, essa adição inicial não é relevante em termos de estratégia como visto no Nim modificado. De fato, considere por exemplo, os jogos $G + H + I$ e $*4 + H + I$, onde H e I são jogos imparciais, e suponha que o jogador A possua a estratégia vencedora para $*4 + H + I$. Então, A também possui uma estratégia vencedora para $G + H + I$, pois basta ele manter a mesma estratégia, com o adendo de que quando B efetuar algum movimento extra de "adicionar pedras" em G, A apenas remove tais pedras adicionadas para cancelar o movimento extra. [Berlekamp *et al.* (1982)]

O mesmo raciocínio implica que qualquer jogo imparcial da forma $G = \{*a_1, *a_2, \dots, *a_n\}$ pode ser considerado uma pilha de Nim tradicional disfarçada com $mex(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pedras, onde $mex(a_1, a_2, ..., a_n)$ é o menor inteiro não-negativo que é diferente de a_i, para todo i de 1 a n. Ou seja, $G = *mex(a_1, a_2, ..., a_n)$, e chamamos essa regra de **Regra do Mex**. [Berlekamp *et al.* (1982)]

Capítulo 4

Teorema de Sprague Grundy

Agora que o jogo do Nim já foi exposto, temos contexto suficiente para tratar de um teorema bastante importante dentro da teoria de jogos imparciais, o teorema de Sprague-Grundy. Vamos começar com um teorema:

Teorema 4. *Um jogo de Nim com várias pilhas é equivalente a um jogo de Nim com uma única pilha.*

Prova: Indução na quantidade total de pedras no jogo.

Um jogo com uma única pedra é equivalente a uma única pilha de Nim (ela mesma). Seja $n \in \mathbb{Z}^+$ e suponha que todos os jogos de Nim com um total de pedras p, tal que $1 \leq p \leq n$, são equivalentes a uma pilha de Nim. Então, um jogo com $n + 1$ pedras também é equivalente a uma pilha de Nim. De fato, seja G um jogo com $n + 1$ pedras. Então, $G = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, de forma que cada um dos jogos $G_1, G_2, \ldots, G_m$ possui um número de pedras entre 1 e n, e portanto é equivalente a uma pilha de nim, por hipótese. Sejam essas pilhas $*g_1, *g_2, \ldots, *g_m$ respectivamente. Então, $G = \{*g_1, *g_2, \ldots, *g_m\} = *mex(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ pela regra do Mex, o que prova o passo, e consequentemente o teorema.

O teorema de Sprague-Grundy é uma versão mais genérica deste teorema e diz que qualquer jogo imparcial é equivalente a um jogo de Nim com uma única pilha. Vamos começar a analisá-lo introduzindo grafos para auxílio.

4.1 Jogos e grafos

Jogos imparciais estão muito relacionados com grafos acíclicos dirigidos (ou DAGs, do inglês *Directed Acyclic Graphs*), no sentido de que um jogo imparcial pode ser visto como um grafo onde os vértices são as posições (estados) e os arcos representam as transições entre as posições. Como cada instância de um jogo imparcial é finita, o grafo não possui ciclos e é portanto uma DAG.

O contrário também pode ser observado: uma DAG define um jogo imparcial, pois define um conjunto de posições (vértices) e as possíveis transições entre elas (arestas) e um jogador vence quando o jogo atinge um vértice terminal após seu movimento. Uma instância desse jogo é indicada especificando um vértice como a posição inicial.

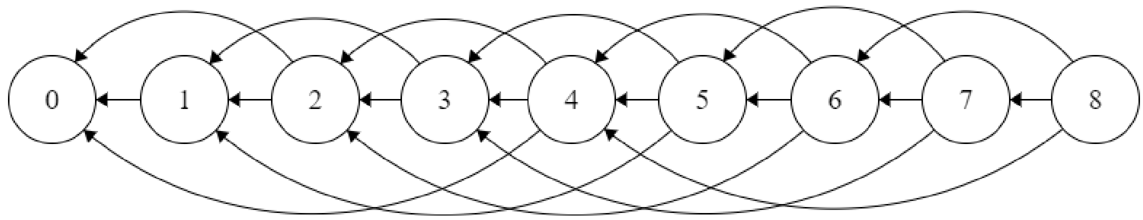

Figura 4.1: *Exemplo do Jogo da Subtração com 8 pedras e podendo remover 1, 2 ou 4 pedras, representado em forma de DAG*

Em termos mais formais, um jogo imparcial pode ser representado por um grafo $G = (P, F)$, onde:

1. P é o conjunto das posições;
2. F é uma função que retorna para cada posição p o conjunto de posições alcançáveis por um movimento;
3. A posição inicial p_0 está em P;
4. Os jogadores alternam movimentos. Se um jogador moveu para a posição x, seu oponente terá que escolher a próxima posição dentre aquelas do conjunto $F(x)$;
5. Perde o jogador que se encontrar na posição t, tal que $F(t) = \emptyset$.

4.2 A função de Sprague-Grundy

De fato, com a representação de jogos imparciais como grafos, veremos agora que cada posição (e em particular, a posição inicial) de um jogo $G = (P, F)$ é equivalente a uma pilha de Nim, como enuncia o teorema de Sprague-Grundy.

Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} SG \colon P &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto mex(SG(x) \mid x \in F(p)) \end{aligned}$$

Com a observação de que para uma posição terminal t, ocorre que $SG(t) = 0$. Denominamos tal função como a **função de Sprague-Grundy** do jogo G, e com ela podemos dizer que cada posição p é equivalente a uma pilha de Nim com $SG(p)$ pedras.

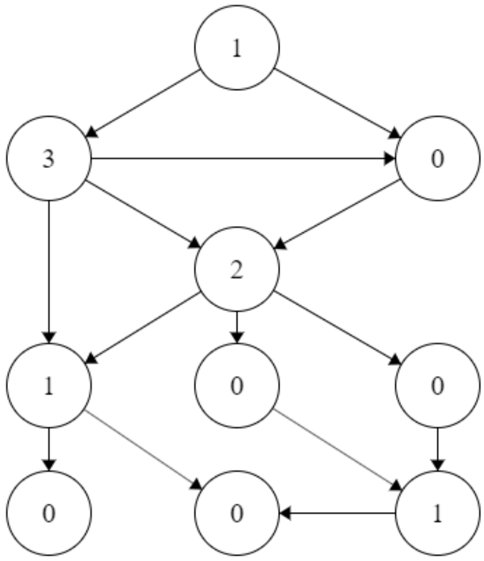

Figura 4.2: *Jogo imparcial representado em forma de DAG, cujas posições estão rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy*

Uma conveniência da função de Sprague-Grundy é que ela permite obter a função de Sprague-Grundy de composições de jogos de uma forma simples.

Teorema 5. *Seja $G_1 = (P_1, F_1), G_2 = (P_2, F_2), \dots, G_n = (P_n, F_n)$ jogos imparciais com funções de Sprague-Grundy $g_1, g_2, \dots, g_n$, respectivamente. Então, a função $g_1 \oplus g_2 \oplus \dots \oplus g_n$ é função de Sprague-Grundy de $G_1 + G_2 + \dots + G_n$. [ucl (2000)]*

Prova. É fato que todos os jogos imparciais existentes possuem exatamente uma única função de Sprague-Grundy, por definição. Note também que dados um jogo $G = (P, F)$ qualquer e uma função f qualquer, para descobrirmos se tal função é a função de Sprague-Grundy do jogo é suficiente mostrar que:

Seja p uma posição do jogo G

1. Para todo $y \in \mathbb{N}$ e $y < f(p)$, existe $vizinho \in F(p)$, tal que $f(vizinho) = y$

2. Não existe $vizinho \in F(p)$, tal que $f(vizinho) = f(p)$

Pois a única função que satisfaz as duas condições é justamente a função de Sprague-Grundy. Então, seja $h = g_1 \oplus g_2 \oplus \dots \oplus g_n$ e $H = G_1 + G_2 + \dots + G_n = (P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n, F)$. Queremos saber se h é a função de Sprague-Grundy do jogo H. Considere $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ uma posição qualquer de H.

1. Seja $y \in \mathbb{N}$ e $y < h(p_1, \dots, p_n)$. Considere y e $h(p_1, \dots, p_n)$ na representação binária, e entre as posições cujos bits diferem entre os dois números, pegue a posição mais significativa. Repare que nessa posição, necessariamente o bit em y é 0 e em $h(p_1, \dots, p_n)$ é 1, pois $y < h(p_1, \dots, p_n)$. Isso significa que o bit em pelo menos um dos termos $g_1(p_1), \dots, g_n(p_n)$ é 1. Seja tal termo $g_i(p_i)$. Repare que $g_i(p_i) \oplus (y \oplus h(p_1, \dots, p_n)) < g_i(p_i)$, pois entre os bits que mudam de

$g_i(p_i)$ para $g_i(p_i) \oplus (y \oplus h(p_1, \ldots, p_n))$, o bit mais significativo é 1 em $g_i(p_i)$ e 0 em $g_i(p_i) \oplus (y \oplus h(p_1, \ldots, p_n))$. Portanto, como g_i representa uma função mex, existe um vizinho de p_i' de p_i, tal que $g_i(p_i') = g_i(p_i) \oplus (y \oplus h(p_1, \ldots, p_n))$. Desta forma, $h(p_1, \ldots, p_i', \ldots, p_n) = g_1(p_1) \oplus \ldots \oplus g_i(p_i') \oplus \ldots \oplus g_n(p_n) = g_1(p_1) \oplus \ldots \oplus (g_i(p_i) \oplus (y \oplus h(p_1, \ldots, p_n))) \oplus \ldots \oplus g_n(p_n) = y$.

2. Para fins de contradição, suponha que existe $(p_1, \ldots, p_i', \ldots, p_n) \in F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$, tal que $h(p_1, \ldots, p_i', \ldots, p_n) = h(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. Isso implica que $g_1(p_1) \oplus \ldots \oplus g_i(p_i') \oplus \ldots \oplus g_n(p_n) = g_1(p_1) \oplus \ldots \oplus g_i(p_i) \oplus \ldots \oplus g_n(p_n)$, o que por sua vez implica que $g_i(p_i') = g_i(p_i)$. Absurdo, pois a função g_i é função de Sprague-Grundy e, por construção, não existem duas posições consecutivas com o mesmo valor da função Sprague-Grundy.

Portanto, a função $h = g_1 \oplus \cdots \oplus g_n$ é função de Sprague-Grundy de $G_1 + G_2 + \cdots + G_n$.

Com o teorema de Sprague-Grundy, conseguimos fazer uma equivalência de qualquer posição de qualquer jogo imparcial com uma pilha de Nim através da função de Sprague-Grundy. Além disso, dado um conjunto de jogos imparciais com suas funções de Sprague-Grundy, conseguimos facilmente obter a função de Sprague-Grundy do jogo que consiste na soma dos jogos, e consequentemente saber o tamanho da pilha de Nim a qual ele é equivalente.

4.3 Aplicações do teorema de Sprague-Grundy

Jogo da Subtração (*Subtraction Game*)

O Jogo da Subtração apresentado no capítulo 2 possui uma versão mais genérica, que pode ser enunciada da seguinte forma: Há uma pilha de n pedras. Dois competidos se revezam removendo um número de pedras entre 1 e k ($k \leq n$), k fixo. Perde o jogador que não puder realizar movimentos.

Supomos, por exemplo, que $n = 10$ e $k = 3$. É evidente que um jogo com 0 pedras é equivalente a pilha de Nim com 0 pedras (ou, *0). E aí:

Jogo com 1 pedra = {jogo com 0 pedras} = {*0} = *1
Jogo com 2 pedras = {jogo com 0 pedras, jogo com 1 pedra} = {*0, *1} = *2
Jogo com 3 pedras = … = {*0, *1, *2} = *3
Jogo com 4 pedras = … = {*1, *2, *3} = *0
Jogo com 5 pedras = … = {*2, *3, *0} = *1
Jogo com 6 pedras = … = {*3, *0, *1} = *2

⋮

É simples ver que, em geral, para um $k \leq n$ qualquer, um jogo com n pedras é equivalente a *$(n \ \% \ (k+1))$, ou seja, a uma pilha de Nim com $n \ \% \ (k+1)$ pedras.

Jogo do cavalo

Considere um tabuleiro como o de xadrez, com a ressalva de que ele possui dimensões n por m (onde n e m são dois inteiros), e um cavalo em uma posição qualquer desse tabuleiro que pode efetuar apenas os seguintes movimentos de andar duas casas para:

- cima, e então uma para esquerda ou direita; ou
- esquerda, e então uma para cima ou para baixo.

Ganha o jogador que mover o cavalo para uma das quatro casas contidas no 2×2 no canto superior esquerdo, ou seja, perde o jogador que não puder fazer mais movimentos.

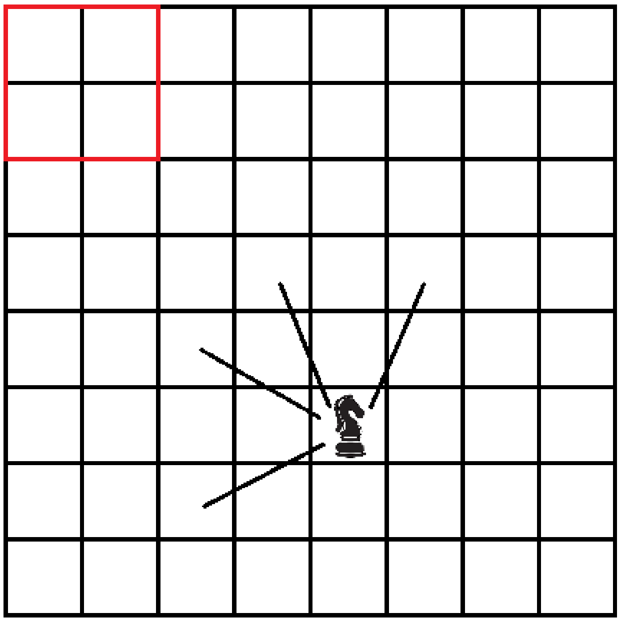

Figura 4.3: *Exemplo do jogo com as indicações dos movimentos que o cavalo pode fazer*

Podemos imaginar o tabuleiro como um grafo em que cada vértice (posição) representa uma casa do tabuleiro e existe um arco de um vértice a para uma casa b, se o cavalo estando na casa representada por a consegue ir para a casa representada por b com um único movimento. Repare que o grafo é finito, dirigido e não há ciclos. Formado o grafo, conseguimos aplicar indutivamente a função de Sprague-Grundy para todo nó.

0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	1	0	0	1	1
1	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2	1	4	3	2	3
0	0	3	4	0	0	1	1
0	0	2	3	0	0	2	1
1	1	2	2	1	2	2	2
1	1	2	3	1	1	2	1

Figura 4.4: *Tabuleiro do jogo do cavalo, cujas posições estão rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy calculadas indutivamente*

Com o auxílio da figura 4.4, podemos notar que o jogo na figura 4.3 (cavalo na sexta linha e quinta coluna) se encontra numa posição perdedora, ou seja, a função de Sprague-Grundy na posição é zero. Agora, imaginamos o mesmo jogo com k cavalos, sendo que vários cavalos podem ocupar a mesma casa no tabuleiro. Como analisar as posições vencedoras e perdedoras nesse caso? Este jogo é equivalente a qual pilha de Nim? Basta considerar cada cavalo como um jogo imparcial e aí o jogo pode ser visto como uma soma de jogos imparciais. Pelo teorema de Sprague-Grundy, é suficiente tirar o `XOR` dos números de cada componente para obter o número da soma.

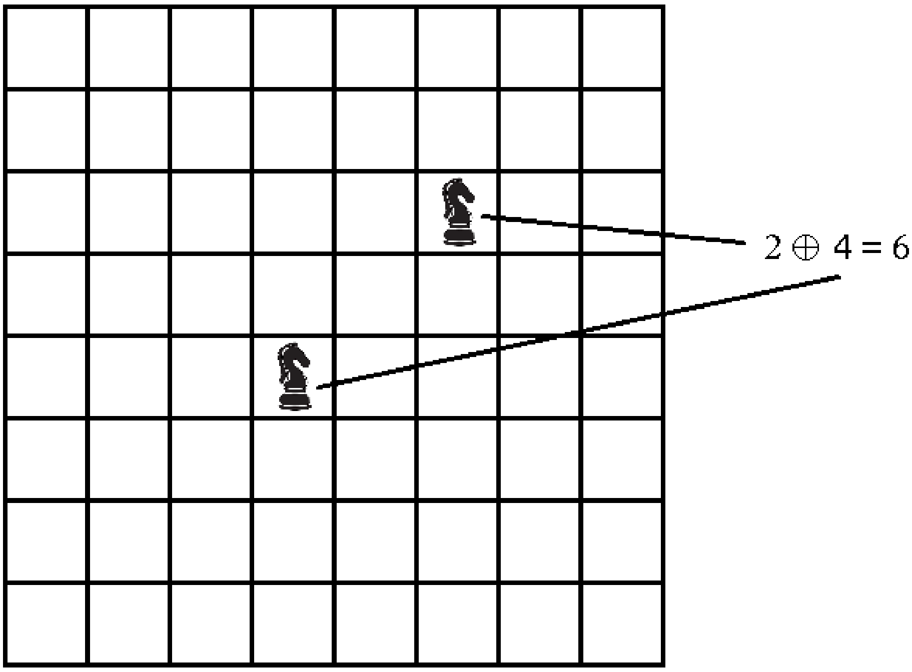

Figura 4.5: *Exemplo do jogo com dois cavalos. Como a função de Sprague-Grundy retorna 6 - um número diferente de zero - o jogo se encontra em uma posição vencedora.*

O jogo de Grundy

O jogo de Grundy consiste no seguinte: como no jogo do Nim, há algumas pilhas de pedras e o jogador em sua jogada escolhe uma pilha de tamanho maior ou igual a 3 e divide tal pilha em duas pilhas de tamanhos diferentes. Perde o jogador que não puder efetuar movimentos, ou seja, quando há apenas pilhas de tamanhos 1 ou 2. Este é um exemplo de jogo que se decompõe em uma soma de jogos em seu andamento.

Vamos fazer a representação em grafos dirigidos de algumas de suas possíveis posições.

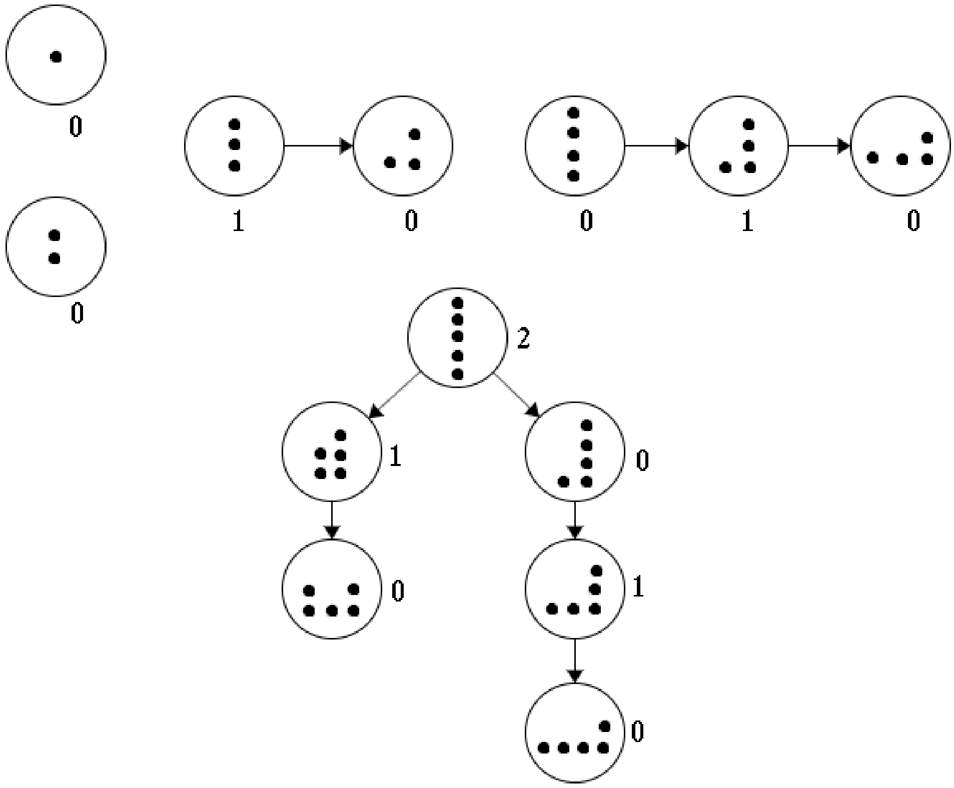

Figura 4.6: *Algumas posições do jogo de Grundy rotuladas com os resultados da função de Sprague-Grundy.*

Capítulo 5

Jogos em pilhas

Entre os jogos imparciais, uma grande quantidade utiliza pilhas, como nos jogos das classes *Takeaway* e *Take-and-Break* (classe de jogos similares aos do Takeaway, com a adição de que as regras permitem que os jogadores dividam as pedras de uma pilha em duas ou mais pilhas). Neste capítulo, veremos algumas propriedades que valem para jogos em pilhas. Num jogo desta categoria, todas as posições podem ser vistas como somas disjuntas de pilhas H_1, H_2, ..., H_n, onde H_i representa uma pilha de tamanho i. Além disso, dada uma pilha H_m, as próximas posições possíveis são da forma:

$$H_{a_1} + H_{a_2} + \cdots + H_{a_n} \ (a_i < m)$$

Como exemplo, considere o seguinte jogo, conhecido como Kayles: Há n pinos de boliche, um ao lado do outro. Dois jogadores se revezam da seguinte forma: em sua vez, o jogador pode escolher um pino, ou dois pinos adjacentes, e remover tais pinos. Repare que se houver, por exemplo, 3 pinos e o primeiro jogador remover o segundo, o segundo jogador não pode remover o primeiro e o terceiro, pois não são adjacentes. O jogador que remover o último pino vence. Podemos imaginar este jogo como um jogo em pilhas, em que inicialmente há uma pilha e as pilhas são potencialmente divididas quando as remoções de pinos ocorrem. Por exemplo, a partir de uma posição H_4 (4 pinos), é possível ir para as seguintes posições: H_3, $H_1 + H_2$, H_2 e $H_1 + H_1$.

5.1 Periodicidade

Antes de entrar em mais detalhes no assunto, vamos definir alguns conceitos fundamentais para o capítulo.

Seja $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ uma sequência de números inteiros, dizemos que ela é **periódica** se existem inteiros $n_0 \geq 0$ e $p \geq 1$, tais que $s_n = s_{n+p}$, para todo $n \geq n_0$. Chamamos n_0 de **pré-período** e p de **período**.

Vimos nos capítulos anteriores que a função de Sprague-Grundy tem um aspecto recursivo e o valor da função para um jogo depende dos valores para jogos mais simples. Dada essa ocorrência, vamos ver que para alguns jogos em pilhas com função de Sprague Grundy SG, a sequência $(SG(H_1),\ SG(H_2),\ \dots)$ é periódica.

Teorema 6. *Jogos da subtração são sempre periódicos.*

Prova. Seja S o conjunto dos números de peças que são possíveis de remover no jogo da subtração, e seja $m = max(S)$. Repare que $SG(n) \leq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que existem apenas um número finito de m-tuplas cujos elementos são menores ou iguais a m. Portanto, a sequência de valores de Sprague-Grundy deve conter dois intervalos diferentes de tamanho m (m-tupla) que possuem exatamente os mesmos elementos. Em termos mais formais, devem existir a e b diferentes tais que:

$$SG(a+i) = SG(b+i), \text{ para todo } i \text{ tal que } 0 \leq i < m$$

A partir disso, uma indução simples é suficiente para mostrar que:

$$SG(a+i) = SG(b+i), \text{ para todo } i$$

□

5.2 Jogos octais

Jogos octais é uma classe de jogos que generaliza vários jogos imparciais. Nela estão inclusos, Kayles, o jogo da subtração, Nim, entre outros. Nos jogos dessa classe, um movimento consiste em remover uma certa quantidade de peças em uma pilha e então opcionalmente dividir o restante das peças na pilha em exatamente duas pilhas não-vazias. Para cada inteiro não-negativo i, as regras definem sob quais circunstâncias i peças podem ser removidas de uma pilha.

As regras de um jogo octal podem ser resumidas na forma de um número em sistema octal, razão do nome.

$$d_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

Onde d_i é um dígito de 0 a 7 e representa as circunstâncias em que i pedras podem ser removidas de acordo com a tabela a seguir.

d_i	Quando i pedras podem ser removidas
0	Nunca
1	Dado que nenhuma peça sobre na pilha
2	Dado que pelo menos uma peça sobre na pilha e a sobra permaneça na mesma pilha
3	Sempre, mas a sobra deve permanecer na mesma pilha
4	Dado que a sobra seja dividida em exatamente duas pilhas não-vazias
5	Dado que *se* sobrarem peças na pilha, elas devem ser divididas em duas pilhas não-vazias
6	Dado que pelo menos uma peça sobre na pilha; a sobra pode opcionalmente ser dividida em duas pilhas não-vazias
7	Sempre; a sobra pode opcionalmente ser dividida em duas pilhas não-vazias

Exemplos:

- O jogo do Nim é representado por 0,333..., ou $0,\overline{3}$
- O jogo da subtração em que é possível remover 1, 2 ou 4 pedras é representado por 0,3303
- O jogo Kayles é representado por 0,77

Lema 7. *Seja H_n uma pilha de um jogo octal Γ. Então, para todo $a \geq 0$, $b \geq 1$, e $j \geq 0$,*

$$H_a + H_b \text{ é uma opção para } H_n$$

$$\text{se e somente se}$$

$$H_a + H_{b+j} \text{ é uma opção para } H_{n+j}$$

Prova. Repare que o número de peças removidas é o mesmo em ambos os casos. Seja i tal número.

$$i = n - (a + b) = n + j - (a + b + j)$$

Seja d_i o i-ésimo dígito do número octal de Γ. Supondo que $a = 0$, as duas situações têm exatamente uma pilha, pois $(b > 0)$, e aí H_b é opção para H_n, se e somente se, $d_i \in \{2, 3, 6, 7\}$. O mesmo vale para H_{n+j}. Já se $a \geq 1$, então ambos $H_a + H_b$ e $H_a + H_{b+j}$ têm duas pilhas, e portanto $H_a + H_b$ é opção de H_n, se e somente se, $d_i \in \{4, 5, 6, 7\}$. O mesmo vale para H_{n+j}.

Teorema 8. *(Teorema da Periodicidade Octal) Seja $\Gamma = d_0, d_1d_2d_3 \ldots d_k$ um jogo octal de tamanho finito k. Suponha que existem $n_0 \geq 1$ e $p \geq 1$ tais que*

$$SG(n + p) = SG(n) \text{ para todo } n, \text{ com } n_0 \leq n < 2n_0 + p + k$$

Então segue que

$$SG(n + p) = SG(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

tal que Γ é periódico com período p e pré-período n_0.

Prova Indução em n. Seja $n \geq 2n_0 + p + k$ e suponha que $SG(m + p) = SG(m)$, para todo m, tal que $n_0 \leq m < n$. Então, todas as opções de H_{n+p} têm forma

$$H_a + H_b, \text{ com } a + b = n + p - i \text{ para algum } i \leq k.$$

Como $n + p \geq 2n_0 + 2p + k$, temos que $a + b \geq 2n_0 + 2p$. Suponha sem perda de generalidade que $b \geq n_0 + p$. Então $n > b - p \geq n_0$ e

$$SG(b - p) = SG(b)$$

Portanto

$$SG(a) \oplus SG(b - p) = SG(a) \oplus SG(b)$$

e daí segue que

$$H_a + H_{b-p} = H_a + H_b$$

Agora $b - p \geq 1$ (como $n_0 \geq 1$), então pelo lema anterior, $H_a + H_{b-p}$ é uma opção de H_n. Isso mostra que toda opção de H_{n+p} é igual a uma opção de H_n. Um argumento similar mostra que toda opção de H_n é igual a uma opção de H_{n+p}, então concluímos que

$$SG(n+p) = SG(n)$$

□

Com isso, sendo Γ um jogo octal, basta calcular os primeiros n valores de Sprague-Grundy, de forma que tal n seja razoavelmente grande, e então testar as condições do teorema para verificar uma possível existência de periodicidade. O teorema serve como uma heurística e não satisfazer suas condições, não implica na não-existência de periodicidade. Apesar disso, ele é bastante útil pois possibilita uma checagem automatizada da existência de periodicidade em jogos que seriam difíceis de checar manualmente.

5.3 Espaços esparsos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0+	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6
12+	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
24+	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
36+	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
48+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
60+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
72+	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Figura 5.1: *84 primeiros valores de Sprague-Grundy do jogo Kayles*

Observando a figura 5.1 e calculando mais valores de Sprague-Grundy do jogo Kayles, percebe-se que a última linha da tabela se repete indefinidamente, indicando uma periodicidade. Considerando as condições do teorema da periodicidade octal, e tomando n_0 como 71, p como 12 e k como 2, confirma-se a periodicidade calculando os primeiros $2n_0 + 2p + k = 2 \cdot 71 + 2 \cdot 12 + 2 = 168$ valores de Sprague-Grundy.

Com uma análise diferente, nota-se que 0, 3, 5 e 6 aparecem pouquíssimas vezes, enquanto 1, 2, 4, 7 e 8 aparecem em abundância. Um padrão que se nota é que os primeiros possuem uma quantidade par de bits 1 em sua expansão binária, enquanto essa quantidade nos últimos é ímpar. Acontece que os números naturais que possuem uma quantidade par de bits 1 em sua expansão binária formam um espaço esparso para o jogo de Kayles - um subgrupo de $(\mathbb{N}, \oplus)$ de indíce 2 que contém apenas um número finito de seus valores de Grundy.

Definição. Seja Γ um jogo octal. Um subgrupo S de $(\mathbb{N}, \oplus)$ de indíce 2 é um **espaço esparso** para Γ se ele contém apenas um número finito de valores de Sprague-Grundy de Γ. Elementos em S e em $\mathbb{N} \setminus S$ são chamados de **raros** e **comuns**, respectivamente.

Como um exemplo, ainda não se sabe ao certo se o jogo de Grundy (citado no capítulo 4) é periódico ou não, mas presume-se que o subgrupo dos números cuja representação binária possui um número par de bits 1, desconsiderando o bit menos significativo, é um espaço esparso para o jogo. Segundo o livro de Siegel (2013), dos primeiros 2^{39} valores de Sprague-Grundy do jogo, apenas 1284 aparecem no espaço esparso.

Através do jogo de Grundy, percebe-se que uma vez que há uma aparente bifurcação entre elementos raros e comuns, essa bifurcação tende a ser permanente. A explicação é que as opções de H_n tem a forma $SG(a) \oplus SG(b)$, e se $SG(a)$ e $SG(b)$ são elementos comuns, então $SG(a) \oplus SG(b)$ é raro, pois em um subgrupo de índice 2, o produto de dois elementos fora do subgrupo é um elemento do subgrupo. Como várias opções de H_n são raros e $SG(n)$ é o mex dos valores de suas opções, com uma alta probabilidade $SG(n)$ será comum.

Teorema 9. *Se Γ possui espaço esparso, então Γ é periódico.*

Prova. Suponha que $SG(n)$ é comum para todo $n \geq n_0$, então ele é o menor elemento comum que não se encontra entre suas opções. Para $n \geq 2n_0+k$, os elementos comuns entre suas opções são da forma

$$SG(a) \oplus SG(b), \text{ com } SG(a) \text{ raro e } b \geq n - n_0 - k$$

E daí $SG(n)$ depende apenas dos seus n_0+k valores de Sprague-Grundy anteriores. Com um argumento similar ao do teorema 6, conclui-se que Γ é periódico.

□

5.4 Wythoff

Wythoff é um jogo em duas pilhas, cujos movimentos possíveis são:

- Remover uma quantidade arbitrária de peças de uma das pilhas, como no Nim
- Remover a mesma quantidade de peças de ambas as pilhas

Desta forma, podemos representar uma posição do jogo como um par não-ordenado $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Aqui utiliza-se o par não-ordenado, pois (a, b) e (b, a) representam essencialmente o mesmo jogo. Logo de início, a posição $(0, 0)$ é terminal e portanto perdedora, já $(0, 1)$ e $(1, 1)$ são vencedoras, pois alcançam $(0, 0)$. Por indução retroativa, nota-se que algumas posições perdedoras são $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 10)$ e $(8, 13)$.

Lema 10. *As posições perdedoras de Wythoff são exatamente os pares da forma* (a_n, b_n) *ou* (b_n, a_n) *de* $\mathbb{N}^2$*, tais que*

$$a_n = mex\{a_i, b_i : i < n\}$$

$$b_n = a_n + n$$

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	...
a_n	*0*	*1*	*3*	*4*	*6*	*8*	...
b_n	*0*	*2*	*5*	*7*	*10*	*13*	...

(Com a observação de que $mex\{\emptyset\} = 0$*)*

Prova. Para provar o lema, podemos assumi-lo como verdadeiro e demonstrar duas coisas: (1) de uma posição perdedora nunca é possível alcançar uma posição perdedora; (2) de uma posição vencedora é sempre possível alcançar uma posição perdedora.

1. Sejam (a_m, b_m) e (a_n, b_n) duas posições perdedoras, com $n > m$. Queremos saber se de (a_n, b_n) conseguimos alcançar (a_m, b_m). Pela natureza da definição, sabemos que $a_n > a_m$ e $b_n > b_m$. Portanto, precisamos apenas verificar se uma alcança a outra através do movimento que consiste em retirar a mesma quantidade de peças de ambas as pilhas. Mas isso não é possível, pois repare que $b_n - a_n = n$ e $b_m - a_m = m$ e retirando a mesma quantidade de ambas as pilhas de (a_n, b_n), a diferença entre as pilhas continua sendo n.

2. Seja (x, y) uma posição vencedora e suponha sem perda de generalidade que $x < y$.

   Caso 1 ($x = a_n$, para algum n). Disso, sabe-se que $y \neq b_n$. Se $y > b_n$, então de (x, y) é possível alcançar (a_n, b_n) através de um movimento. Se $y < b_n$, então $y - x < n$, $a_{y-x} < a_n = x$ e $b_{y-x} = a_{y-x} + y - x < y$. E aí de (x, y) é possível alcançar (a_{y-x}, b_{y-x}).

   Caso 2 ($x \neq a_n$, para todo n). Repare que pela definição esse caso implica que $x = b_m$. Mas $a_m < x = b_m < y$, e aí é possível mover de $(x = b_m, y)$ para (b_m, a_m).

$\square$

Definição. Dizemos que dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}^+$ são complementares se $B = \mathbb{N}^+ \setminus A$, ou em outras palavras, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{N}^+$.

Lema 11. *Sejam* $\alpha, \beta > 1$ *irracionais tais que*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

Então, os conjuntos $\{\lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}^+\}$ *e* $\{\lfloor n\beta \rfloor : n \in \mathbb{N}^+\}$ *são complementares.*

Prova. Defina conjuntos A e B da seguinte forma:

$$A = \left\{ \frac{i}{\alpha} : i \in \mathbb{N}^+ \right\} \text{ e } B = \left\{ \frac{i}{\beta} : i \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Repare que $\alpha/\beta = \alpha - 1$ e portanto é irracional. Além disso, $A \cap B = \emptyset$, pois se $i/\alpha = j/\beta$, para algum par de naturais i, j, então $\alpha/\beta = i/j$ seria racional. Considere $X = A \cup B$ e a função f que conta a quantidade de elementos em X menores ou iguais a um dado elemento em X. Ou seja, para $x \in X$, $f(x) = |\{k \leq x : k \in X\}|$. Note que como X é uma união disjunta de A e B, $f[A]$ e $f[B]$ são complementares.

Vamos verificar que $f[A] = \{\lfloor i\beta \rfloor : i \in \mathbb{N}^+\}$ e $f[B] = \{\lfloor i\alpha \rfloor : i \in \mathbb{N}^+\}$, o que prova o lema. Seja $x = i/\alpha$ um elemento genérico de A e calculemos $f(x)$. Primeiramente, existem i elementos em A menores ou iguais a x. Precisamos contar a quantidade de elementos em B menores ou iguais a x.

$$|\{k \leq x : k \in B\}| = \left| \left\{ \frac{l}{\beta} \leq x : l \in \mathbb{N}^+ \right\} \right| = \{l \leq x\beta : l \in \mathbb{N}^+\} = \lfloor x\beta \rfloor$$

Sendo assim, $f(x) = i + \lfloor x\beta \rfloor = i + \lfloor i\beta/\alpha \rfloor = i + \lfloor i(\beta - 1) \rfloor = \lfloor i\beta \rfloor$, e daí $f[A] = \{\lfloor i\beta \rfloor : i \in \mathbb{N}^+\}$. Um argumento simétrico mostra que $f[B] = \{\lfloor i\alpha \rfloor : i \in \mathbb{N}^+\}$.

□

Teorema 12. *A n-ésima posição perdedora de Wythoff é*

$$(a_n, b_n) = (\lfloor n\phi \rfloor, \lfloor n\phi^2 \rfloor)$$

Prova. È simples checar que $\phi^2 = \phi + 1$, e daí $n\phi^2 = n\phi + n$, então

$$\lfloor n\phi^2 \rfloor = \lfloor n\phi + n \rfloor = \lfloor n\phi \rfloor + n \tag{5.1}$$

Além disso, temos que $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$, o que implica que $\lfloor n\phi \rfloor$ e $\lfloor n\phi^2 \rfloor$ são complementares. Daí, pelo fato de serem complementares e com as observações de que $i\phi < i\phi^2$ para todo i inteiro positivo e $j\phi < k\phi$ se $j < k$, vale que

$$\lfloor n\phi \rfloor = mex\{\lfloor i\phi \rfloor, \lfloor i\phi^2 \rfloor : i < n\} \tag{5.2}$$

Com as equações 5.1 e 5.2, basta utilizar o lema 10 para provar o teorema.

□

Capítulo 6

Teorema Generalizado de Sprague Grundy

Podemos considerar uma classe um pouco mais ampla do que a classe de jogos imparciais se ignorarmos a regra 6 descrita na seção 2.3. Isto é, podemos considerar a classe dos jogos imparciais com laços (do inglês, *loopy impartial games*) que contém jogos tal que uma posição pode ocorrer várias vezes em uma mesma partida.

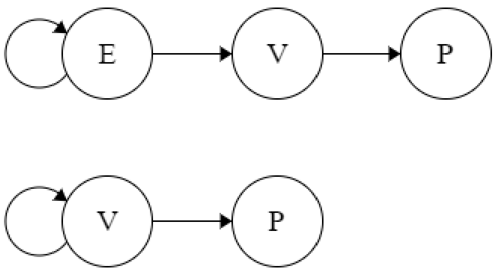

Figura 6.1: *Jogos imparciais com laços*

Vemos dois jogos na figura 6.1. O primeiro deles possui uma posição com laço a partir da qual não é vantajoso para nenhum dos dois jogadores efetuar o movimento para a posição vencedora, e aí ambos ficam indefinidamente nessa posição. Chamamos essa posição de **posição empate**. Porém, nem sempre uma posição contendo um laço é uma posição empate, como a posição do segundo jogo, por exemplo.

Dizemos que um jogo G tem **rank finito** se ele é equivalente a uma pilha de Nim, isto é, $G = *m$ para algum natural m, e $SG(G) = m$. Por outro lado, um jogo que não é igual a nenhum jogo imparcial sem laços é dito ter **rank infinito** ou **rank** ∞. Estes jogos tem alguns detalhes adicionais interessantes. Além das posições empate, há casos como o segundo jogo da figura 6.1, por exemplo, que chamaremos de H. Tal jogo possui uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, porém o jogo $H+*m$ (para algum $m \geq 1$) não possui estratégia para nenhum jogador, já que se não houver opções vantajosas para o jogador a efetuar a jogada, ele pode simplesmente permanecer na mesma posição. Desta forma, fica evidente que H não é equivalente a nenhuma pilha de Nim.

Definição. Um **jogo imparcial com laços** é um par $G = (V, x)$ onde V é um grafo e x é um vértice de V representando a posição atual. Dizemos que G é finito se V é finito. As **opções** de G são jogos da forma $G' = (V, x')$, tal que existe um arco (x, x') em V.

Definição. Seja $G = (V, x)$ e $H = (W, y)$ jogos imparciais com laços. Definimos $G + H$ como $(V \times X, (x, y))$.

Definição. Dizemos que $G = (V, x)$ é terminal se não há nenhum arco partindo de x no grafo V.

6.1 Resultados de um jogo com laços

Definição. Definimos conjuntos P_n como:

- $G \in P_0$ se G é terminal;
- $G \in P_{n+1}$ se para todo $G' \in G$, existe algum $G'' \in G'$ tal que $G'' \in P_n$.

Note que por indução $P_n \subset P_{n+1}$.

Imagine um jogo G como se fosse uma pilha de Nim com duas pedras, mas com a adição de que se a pilha tiver exatamente duas pedras, os jogadores tem o direito a "passar", ou seja, optar por não efetuar nenhum movimento em sua jogada. Seu grafo é idêntico ao segundo jogo da figura 6.1. Agora, considere o jogo $G + *2$. Os conjuntos P_0 e P_1 de tal jogo são explicitados a seguir:

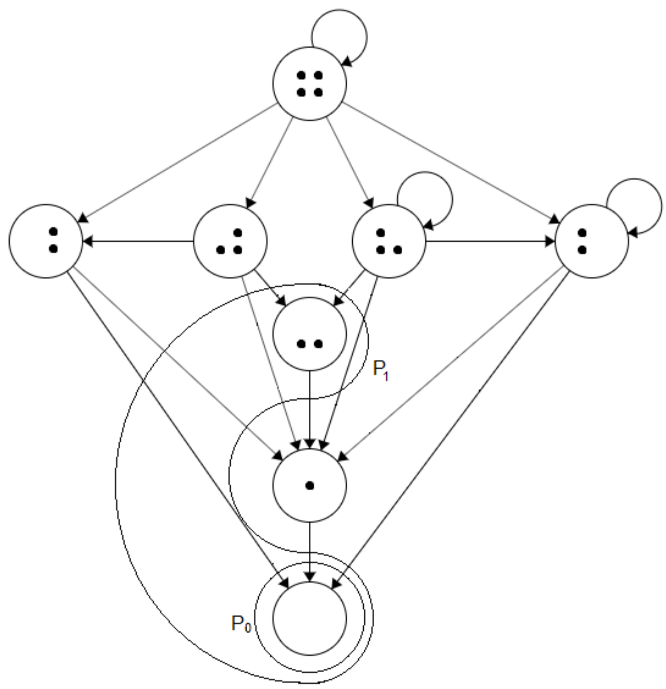

Figura 6.2: *Jogo $G + *2$ com os conjuntos P_0 e P_1 explicitados.*

Definição. Seja G um jogo imparcial com laços finito. Dizemos que G é:

- uma **posição perdedora** se $G \in P_n$, para algum n;
- uma **posição vencedora** se algum $G' \in G$ é uma posição perdedora;
- uma **posição empate** se G não é uma posição perdedora, nem vencedora.

Se G é uma posição perdedora, então consideramos que $rank(G)$ é o menor índice n tal que $G \in P_n$. Basicamente a intuição destas definições é que agora as posições perdedoras são aquelas tais que todas as opções possuem um jeito de voltar para uma posição perdedora, mas de *rank* menor. Desta forma, fica garantido que um jogador em uma posição perdedora será levado à posição perdedora de *rank* 0 (terminal), e perderá a partida, não permitindo que ele possa ficar indefinidamente em um laço.

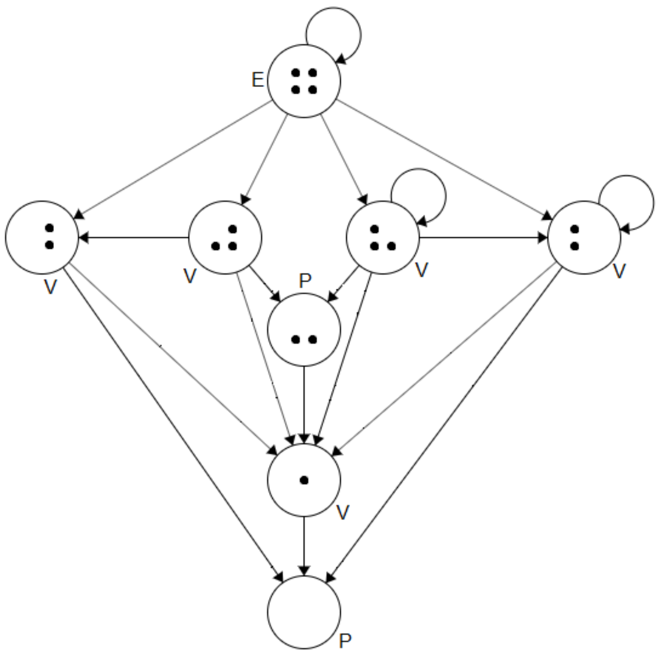

Figura 6.3: *Posições de G + *2 rotuladas como perdedoras, vencedoras ou empate.*

Teorema 13. *Seja G um jogo imparcial com laços finito.*

1. *G é uma posição perdedora sse toda opção de G é uma posição vencedora;*
2. *G é uma posição vencedora sse existe uma opção de G que é uma posição perdedora;*
3. *G é uma posição empate sse nenhuma opção é posição perdedora e existe pelo menos uma opção que é posição empate.*

Prova. (1) ($\Rightarrow$) direto da definição. ($\Leftarrow$) G é finito, então suponha que todas as opções $G_1, \ldots, G_n$ de G são posições vencedoras, e que $G_1, \ldots, G_n$ alcançam posições perdedoras $H_1, \ldots, H_n$, respectivamente. Seja $m = max(rank(H_1), \ldots, rank(H_n))$, então $H_1, \ldots, H_n \in P_m$ e daí $G \in P_{m+1}$.

(2) Direto da definição.

(3) Com as equivalências (1) e (2) provadas, esta sai como consequência, pois as posições de empate são as que sobram - não são perdedoras, nem vencedoras.

Teorema 14. *Seja G um jogo imparcial com laços finito.*

(a) Se G é uma posição perdedora, então o segundo jogador pode forçar uma vitória.

(b) Se G é uma posição vencedora, então o primeiro jogador pode forçar uma vitória.

(c) Se G é uma posição empate, então qualquer jogador pode forçar (pelo menos) um empate.

Prova. (a) Pela definição, de uma posição em P_m é possível alcançar uma posição em P_{m-1} em 2 jogadas. Portanto, uma indução simples mostra que se $G \in P_n$, então o segundo jogador pode forçar uma vitória em $2n$ jogadas (n para cada jogador).

(b) Se G é uma posição vencedora, então o primeiro jogador pode mover para uma posição em P_n (para algum n) por definição, e aí pelo item (a) forçar uma vitória em $2n$ jogadas.

(c) Qualquer um dos dois jogadores pode forçar um empate com a seguinte estratégia: Se em algum determinado momento houver uma opção P, mova para tal posição. Se não houver, mova para a posição empate (a opção empate existe pelo item 3 do teorema 13).

Teorema 15. *Se G é posição perdedora, então $G = 0$.*

Prova. Basta provar que $G + X = X$, para todo jogo X. Se G é um jogo, seja $o(G) \in \{perdedora, vencedora, empate\}$ o tipo da posição de G. Repare que pela provar que $G+X = X$, para todo jogo X é equivalente a provar que $o(G+X) = o(X)$, para todo X. A prova desta última igualdade pode ser feita com uma indução em $rank(G)$. Vamos fixar um G pelo resto da prova e assumir que o teorema é válido para todo jogo de rank menor que $rank(G)$.

Note que

$$o(X) = perdedora \Rightarrow o(G + X) = perdedora, \text{ para todo X}$$

Para comprovar isso, primeiro usamos uma simples indução em $rank(X)$. Para todo $X' \in X$, existe algum $X'' \in X$ tal que $o(X'') = perdedora$ e $rank(X'') < rank(X)$. Por indução em $rank(X)$, podemos assumir que $o(G + X'') = perdedora$.

Da mesma forma, para todo $G' \in G$, existe algum $G'' \in G'$ tal que $o(G'') = perdedora$ e $rank(G'') < rank(G)$. E aí pela indução no $rank(G)$, temos que $G'' = 0$, e por consequência $o(G'' + X) = perdedora$.

Desta forma, todas as opções de $G + X$ tem uma opção perdedora, e portanto $G + X$ é perdedora.

Note também que

$$o(X) = perdedora \Leftarrow o(G + X) = perdedora, \text{ para todo X}$$

A indução nesta implicação é em $rank(G + X)$. Para todo $X' \in X$, existe uma opção $(G + X')' \in G + X'$ tal que $o((G + X')') = perdedora$ e $rank((G + X')') < rank(G + X)$. $(G + X')'$ tem forma $G + X''$ ou $G' + X'$. Se $o(G + X'') = perdedora$, então por indução em $rank(G+X)$, podemos assumir que $o(X'') = perdedora$. Já se $o(G' + X') = perdedora$, então basta escolher $G'' \in G'$, tal que $o(G'') = perdedora$; aí $o(G'' + X') = vencedora$. Por indução em $rank(G)$, temos que $o(X') = vencedora$. Conclui-se que todas as opções de X são posições vencedoras.

Sendo assim, temos que

$$o(G + X) = perdedora \iff o(X) = perdedora, \text{ para todo } X$$

e por consequência

$$o(G + X) = vencedora \iff o(X) = vencedora, \text{ para todo } X$$

e essas duas equivalências são suficientes para provar o teorema.

6.2 Valores de Nim com laços

Vamos construir uma nova definição dos valores de Sprague-Grundy que se adéque a jogos com laços. Estes valores são elementos de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, e por conveniência consideramos que $m < \infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição. Para cada jogo G e inteiro $n \geq 0$, definimos $SG_n(G) \in \mathbb{N} \cup \infty$ da seguinte forma

$$SG_0(G) = \begin{cases} 0 & \text{se } G \text{ é terminal} \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E aí para $n \geq 0$, seja $m = mex\{SG_n(G') : G' \in G\}$ e

$$SG_{n+1}(G) = \begin{cases} m & \text{se para cada } G' \in G \text{ com } SG_n(G') > m, \\ & \text{existe } G'' \in G' \text{ com } SG_n(G'') = m \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 16. *Para todos G e n*

(a) $SG_n(G) = 0 \iff G \in P_n$

(b) $SG_n(G) = m < \infty \Rightarrow SG_{n+1}(G) = m$

Prova. (a) ($\Rightarrow$) Para $n = 0$, a implicação é clara. Para $n > 0$, $SG_n(G) = 0$ implica $SG_{n-1}(G') > 0$, o que significa que para todo G' existe um G'' com $SG_{n-1}(G'') = 0$. Por indução, temos que $G'' \in P_{n-1}$.

($\Leftarrow$) Argumento similar ao da ida.

(b) Para cada $a < m$, existe algum G' com $SG_{n-1}(G') = a$. Por indução em n, podemos assumir que $SG_n(G') = a$. Agora, se considerarmos qualquer G' tal que $SG_n(G') \geq m$, por indução em n, podemos assumir que $SG_{n-1}(G') = SG_n(G')$ ou

∞. Portanto, $SG_{n-1}(G') > m$, então existe algum G'' com $SG_{n-1}(G'') = m$. Por indução em n, $SG_n(G'') = m$ também.

Uma consequência do item (b) é que dado um jogo G, existem apenas duas possibilidades:

- $SG_n(G) = \infty$ para todo n; ou
- existe um m único e um $n_0 \geq 0$, tais que

$$SG_n(G) = \begin{cases} \infty & \text{se } n < n_0 \\ m & \text{se } n \geq n_0 \end{cases}$$

Definição. Denotamos $SG(G) = m$ se $SG_n(G) = m$ para algum n. Do contrário, denotamos $SG(G) = \infty(A)$, onde $A = \{a \in \mathbb{N} : SG(G') = a$ para alguma opção $G'\}$. Nesse contexto, denominamos SG(G) como **valor de Nim com laços** (do inglês, *loopy nim values*). O rank de G, denotado como $rank(G)$, é o menor n tal que $SG_n(G)$ é finito ou ∞ se tal n não existir. Note que esta nova definição de rank é consistente com a definição prévia utilizada até o momento.

Teorema 17. *Seja G um jogo imparcial finito com laços.*
(a) $SG(G) = 0 \iff G$ é uma posição perdedora.
(b) $SG(G)$ é um inteiro $m > 0 \Rightarrow G$ é uma posição vencedora.
(c) $SG(G) = \infty(A)$ e $0 \in A \Rightarrow G$ é uma posição vencedora.
(d) $SG(G) = \infty(A)$ e $0 \notin A \Rightarrow G$ é uma posição empate.

Prova. O item (a) é equivalente ao teorema 16.b. Em ambos os itens (b) e (c), temos que $SG(G') = 0$ para algum G', então a implicação segue do item (a) e do teorema 13. No item (d), G não é posição perdedora pelo item (a). Também sabemos que G não é uma posição vencedora, pois não existe uma opção de G que é posição perdedora ($0 \notin A$).

6.3 Álgebra de valores de Nim com laços

Por fim, para uma análise completa dos valores de Nim com laços, vamos verificar que $SG(G+H)$ pode ser obtido em função de $SG(G)+SG(H)$. Isso nos dá a mesma praticidade do teorema 5 a respeito dos valores de Sprague-Grundy apresentado no capítulo 4 - a partir do valores de Nim com laços de dois jogos G e H, conseguimos facilmente o valor de Nim com laços do jogo $G + H$.

Teorema 18. *$SG(G) = m \Rightarrow G = *m$.*

Prova. Se G é terminal, a implicação é imediata pois neste caso necessariamente $m = 0$. Caso contrário, seja $n = rank(G)$. Vamos mostrar que $G + *m \in P_{m+n}$, pois conseguimos a prova com isso em conjunto com o teorema 15. Seja $m = mex\{SG_{n-1}(G') : G' \in G\}$. Desta forma, cada movimento para $G + *a$ pode ser revertido a um $G' + *a \in P_{a+n-1}$ e, por indução, segue que $G' + *a \in P_{a+n-1}$.

Agora, considere um movimento para $G' + *m$, and seja $n' = rank(G')$. Se $n' < n$ e $SG(G') = a < m$, então $G' + *m$ pode ser revertido a $G' + *a$, que por indução está contido em $P_{a+n'}$. Se ou $n' \geq n$, ou $SG(G') > m$, então G' tem uma opção G'' tal que $SG(G'') = m$ e $SG_{n-1}(G'') = m$. Então $G' + *m$ pode ser revertido a $G'' + *m$, que por indução está contido em P_{m+n-1}.

Lema 19. *rank(G)* $= \infty \Rightarrow rank(G + H) = \infty$*, para todo* H

Prova. Suponha que o lema é falso, e entre os contra-exemplos considere um (G, H) tal que $rank(G + H)$ é minimal. Seja $n = rank(G + H)$ e $m = SG(G + H)$. Note que $rank(H) = \infty$, pois $H = *a$ implicaria $G = *m + *a$. Como G tem rank ∞, deve haver uma opção G' também de rank ∞, e pela minimalidade de n temos que $rank(G' + H) \geq n$. Portanto $G' + H$ deve ser uma opção de X com $SG(X) = m$ e $rank(X) < n$. Mas X necessariamente tem forma $G'' + H$ ou $G' + H'$, isto é, tem pelo menos um componente de rank ∞ (ou H, ou G'). Absurdo, pois n é minimal.

Teorema 20. *Para todo* G *e* H*, temos que*

$$SG(G + H) = SG(G) \oplus SG(H)$$

onde $\infty(A) \oplus b = \infty(A \oplus b)$ *e* $\infty(A) \oplus \infty(B) = \infty(\emptyset)$*.*

(Consideramos $A \oplus b = \{a \oplus b : a \in A\}$*)*

Prova. Suponha que $SG(G) = a$ e $SG(H) = b$, ambos finitos. Pelo teorema 18, $G = *a$ e $H = *b$, e daí $G + H = *(a \oplus b)$.

Agora suponha que $rank(G) = \infty$, mas $rank(H)$ é finito. Então, pelo lema 19, temos que $rank(G+H) = \infty$. Além disso, $G'+H$ com $SG(G')$ implica $SG(G'+H) = SG(G') \oplus b$, e pelo lema 19, todas as opções de $G + H$ tem rank ∞, o que prova que $SG(G + H) = \infty(A \oplus b)$.

Por fim, supondo que $rank(G) = rank(H) = \infty$, pelo lema 19, $G + H$ e suas opções têm rank ∞. Então $SG(G + H) = \infty(\emptyset)$.

Capítulo 7

Algoritmos

Como visto nos capítulos anteriores, o conceito de estratégia vencedora envolve uma “receita de bolo” para um dos jogadores sempre vencer. Ou seja, para cada movimento que seu oponente fizer, há um movimento estratégico a ser efetuado, e após alguns turnos jogando desta maneira o jogador sairá como vencedor. Tal receita pode ser transcrita na forma de algoritmos e tabelas de programação dinâmica.

7.1 Implementação do jogo do Nim

Utilizando os teoremas vistos sobre Nim, elaborei um programa em Python que joga o Nim com um jogador de forma interativa e sempre ganha. O programa gera uma posição inicial de modo que o `XOR` entre as quantidades de pedras nas pilhas é zero. Então, sempre que o jogador efetuar um movimento, esse `XOR` deixa de ser zero, e aí o programa faz uma jogada tal que o `XOR` volte a ser zero. Como o jogo é finito, fica evidente que em um determinado momento o programa irá retirar a última pedra do jogo.

```python
from __future__ import print_function
import random

def xor(heaps):
    res = 0
    for x in heaps:
        res = res ^ x
    return res

heaps = random.sample(xrange(1,10), 5)
while xor(heaps) != 0:
    heaps = random.sample(xrange(1,10), 5)

def display():
    for i in range(len(heaps)):
        print("pilha ", i, ": ")

        print(heaps[i])
        for j in range(heaps[i]):
            print("O")
```

```

def play():
    x = xor(heaps)
    p = 0
    rr = 0
    while x >= (1 << p):
        rr = p
        p += 1

    for i in range(len(heaps)):
        if ((heaps[i] >> rr) % 2 == 1):
            res = heaps[i] ^ x
            print("Computador tirou ", heaps[i] - res, " pedras da pilha ", i)
            heaps[i] = res
            break

while True:
    display()

    print("Sua vez de jogar, digite a pilha e a quantidade de pilhas a tirar dela")
    pilha, pedras = raw_input().split()
    pilha = int(pilha)
    pedras = int(pedras)

    heaps[pilha] -= pedras

    display()
    play()
```

7.2 Programação dinâmica

Quando falamos de jogos imparciais, mencionamos a associação com grafos dirigidos acíclicos, ou DAGs. Um conceito bastante importante de DAGs é que ela implica em uma ordenação de seus vértices, de forma que se existe um caminho do vértice A ao vértice B, então B aparece antes de A na ordenação. Esta ordenação é denominada ordenação topológica. Repare que esta ordenação não necessariamente é total, isto é, pode haver dois vértices A e B tal que não existe um caminho de A para B, nem de B para A, e portanto A e B não são comparáveis.

A ordenação topológica, por sua vez, induz um outro conceito bastante importante dentro de computação: programação dinâmica. Em termos de algoritmos, aplicamos o conceito de programação dinâmica na hora de calcular a função de Sprague-Grundy em cada um dos vértices com a indução retroativa na figura 4.4, por exemplo.

Como exemplo, considere o jogo Kayles apresentado no capítulo 5. Ele possui uma estratégia bem simples, a do espelhamento. No caso, se n for ímpar, o primeiro jogador remove o pino do meio, separando os pinos em dois grupos. A partir daí, ele simplesmente espelha as jogadas do segundo jogador, porém no grupo oposto de forma simétrica. Já se n for par, basta ele separar os pinos em dois grupos removendo os dois pinos do meio e efetuar o mesmo procedimento.

Repare que Kayles é um jogo imparcial e portanto, pelo teorema de Sprague-Grundy, ele é equivalente a uma pilha de Nim de alguma forma. Façamos sua análise. Chamamos de K_n um jogo que representa um grupo de n pinos consecutivos, e aí cada movimento transforma um grupo em uma soma de jogos. Por exemplo, a primeira jogada da estratégia do espelhamento transforma um jogo K_n em $K_{\frac{n-1}{2}} + K_{\frac{n-1}{2}}$ ou $K_{\frac{n-2}{2}} + K_{\frac{n-2}{2}}$.

Se K_n é um jogo de Kayles com n pinos, vamos chamar o número de pedras na pilha equivalente a K_n de $nim(K_n)$. Sendo assim:

$$nim(K_n) = mex\{nim(K_i+K_{n-1-i}), nim(K_j+K_{n-2-j}) \mid i = 0, ..., n-1; j = 0, ..., n-2\}$$

Mas, pelo teorema 3, $nim(A + B) = nim(A) \oplus nim(B)$. Logo:

$$nim(K_n) = mex\{nim(K_i) \oplus nim(K_{n-1-i}), nim(K_j) \oplus nim(K_{n-2-j})$$
$$\mid i = 0, ..., n-1; j = 0, ..., n-2\}$$

Chegamos à relação de recorrência necessária para aplicar a programação dinâmica. Pela indução retroativa, começamos com a base, isto é, $nim(K_0) = 0$. E fazemos o resto usando programação dinâmica. [mit (2010)]

$$nim(K_1) = mex\{nim(K_0) \oplus nim(K_0)\} = mex\{0\} = 1$$

$$nim(K_2) = mex\{nim(K_0) \oplus nim(K_1), nim(K_1) \oplus nim(K_0), nim(K_0) \oplus nim(K_0)\} =$$
$$mex\{1, 1, 0\} = 2$$

...

Abaixo um código em Python que utiliza programação dinâmica para calcular $nim(K_i)$, para i de 0 a 100.

```
def mex(set):
  i = 0
  while i in set:
    i += 1
  return i

nimk = [0]
N = 100

for n in range(1, N+1):
  set = []

  for i in range(0, n):
    set.append(nimk[i] ^ nimk[n-1-i])

  for j in range(0, n-1):
    set.append(nimk[j] ^ nimk[n-2-j])

```

```
    nimk.append(mex(set))

print(nimk)
```

7.3 Problemas de competições de programação

Muitas aplicações de teoria combinatória dos jogos aparecem em problemas de programação competitiva. Um exemplo ocorreu na primeira fase da Maratona de Programação de 2018. O problema é o seguinte:

Bolinhas de Gude

Usar bolinhas de gude como moeda não deu muito certo em Cubicônia. Na tentativa de se redimir com seus amigos, depois de roubar suas bolinhas de gude, o imperador decidiu convidar todos para uma noite de jogos em seu palácio.

Naturalmente, os jogos utilizam bolinhas de gude, afinal agora o imperador precisa encontrar alguma utilidade para tantas bolinhas. N bolinhas de gude são espalhadas em um grande tabuleiro cujas linhas são numeradas de 0 a L e as colunas numeradas de 0 a C. Os jogadores alternam turnos e em cada turno o jogador da vez deve escolher uma das bolinhas de gude e movê-la. O primeiro jogador que mover uma bolinha para a posição (0, 0) é o vencedor. Para que o jogo seja interessante, os movimentos são limitados; do contrário, o primeiro jogador sempre moveria a bolinha para a posição (0, 0) e venceria. Um movimento consiste em escolher um inteiro u maior que 0 e uma bolinha, cuja localização denotaremos por (l, c), e movê-la para uma das seguintes posições, desde que a mesma não saia do tabuleiro:

- $(l - u, c)$;
- $(l, c - u)$; ou
- $(l - u, c - u)$.

Note que mais de uma bolinha de gude pode ocupar a mesma posição no tabuleiro. Como o imperador não gosta de perder você deve ajudá-lo a determinar em quais partidas ele deve participar. Como é de se esperar, sempre que joga o imperador fica com o primeiro turno. Assumindo que todos jogam de forma ótima, seu programa deve analisar a distribuição inicial das bolinhas de gude no tabuleiro e informar se é possível ou não que o imperador vença caso ele jogue.

Entrada

A primeira linha contém um inteiro N ($1 \leq N \leq 1000$). Cada uma das N linhas seguintes contém dois inteiros l_i e c_i indicando em qual linha e coluna a i-ésima bolinha de gude se encontra no tabuleiro ($1 \leq l_i$, $c_i \leq 100$).

Saída

Seu programa deve produzir uma única linha contendo o caractere Y caso seja possível para o imperador ganhar o jogo ou N caso contrário.

Entrada 1	Saída 1
2 1 3 2 3	Y
Entrada 2	**Saída 2**
1 1 2	N

Análise

Este jogo é imparcial e, portanto, é equivalente a um jogo do Nim pelo teorema de Sprague-Grundy. Desta forma, realizando a equivalência, é possível verificar quem será o vencedor assumindo que ambos os jogadores jogam de forma ótima.

Repare que se houver uma peça em alguma das posições dos tipos $(0, x)$, $(x, 0)$ ou (x, x), então o jogador a efetuar a jogada é o vencedor, pois ele pode simplesmente mover tal peça para $(0, 0)$. Portanto, nossa análise fica limitada apenas aos jogos sem peças em tais posições. Repare que nessa situação, as posições $(2, 1)$ e $(1, 2)$ podem ser consideradas como terminais, pois seus únicos movimentos são para posições do tipo $(0, x)$, $(x, 0)$ ou (x, x). Podemos então considerar que as posições (2,1) e (1,2) são equivalentes a pilha vazia do Nim (sem opções) e completar o tabuleiro com os valores de Sprague-Grundy com indução retroativa. O valor em cada posição é o *mex* dos valores nas posições alcançáveis, ou seja, na mesma linha, coluna ou semi-diagonal.

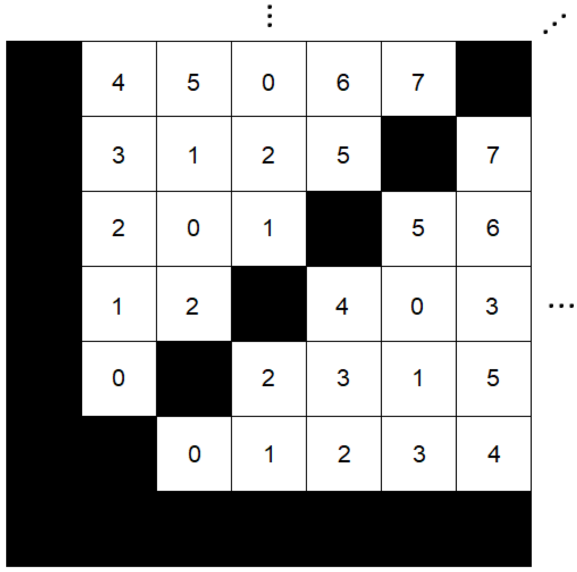

Figura 7.1: *Tabuleiro do jogo de bolinhas de gude com os valores de Sprague-Grundy*

Repare também que cada bolinha de gude é um jogo imparcial e o jogo inteiro é uma soma de jogos imparciais. Então, basta ver os valores de Sprague-Grundy das posições iniciais de cada bolinha e obter o XOR desses valores para obter o valor de Sprague-Grundy do jogo inteiro. Uma observação a ser feita é que o enunciado restringe as bolinhas nas posições (l, c) tal que $l \geq 1$ e $c \geq 1$, mas ainda é necessário efetuar a checagem se há uma bolinha em uma posição do tipo (x, x). Se houver, a resposta deve ser imediatamente Y.

Código da solução

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int MAXN = 112;
int tabuleiro[112][112];

int findmex(set<int> s) {
  int mex = 0;
  while (s.find(mex) != s.end()) mex++;
  return mex;
}

int main(){
  memset(tabuleiro, 0x3f, sizeof(tabuleiro));

  for (int i=1; i<MAXN; i++) {
    for (int j=1; j<MAXN; j++) {
      if (i == j) continue;

      set<int> neighbours;
```

```

      for (int k=0; k<j; k++)
        neighbours.insert(tabuleiro[i][k]);

      for (int k=0; k<min(i,j); k++)
        neighbours.insert(tabuleiro[i-k][j-k]);

      for (int k=0; k<i; k++)
        neighbours.insert(tabuleiro[k][j]);

      tabuleiro[i][j] = findmex(neighbours);
    }
  }

  int n; cin >> n;

  int xorResult = 0;

  for (int i=0; i<n; i++) {
    int l,c; cin >> l >> c;

    if (l == c) {
      cout << "Y" << endl;
      return 0;
    }

    xorResult = xorResult ^ tabuleiro[l][c];
  }

  cout << "YN"[xorResult == 0] << endl;
}
```

O próximo problema ocorreu na primeira fase da Maratona de Programação de 2010.

Jogo da Velha

O jogo da velha é um dos jogos mais antigos da humanidade; os primeiros registros dele são do século I antes de Cristo, no Império Romano. João e Maria jogam bastante jogo da velha, mas depois de algum tempo eles decidiram jogar uma variante do jogo da velha tradicional, o jogo da velha 1-D.

O jogo da velha 1-D é um jogo disputado por dois jogadores em um tabuleiro 1 $\times$ N; inicialmente, todas as casas do tabuleiro estão vazias. Os jogadores alternam-se desenhando uma cruz sobre uma casa vazia. O primeiro jogador a completar uma sequência de três ou mais cruzes em casas consecutivas ganha o jogo.

Maria logo percebeu que, dependendo da situação do jogo, sendo sua vez de jogar, ela pode sempre garantir a vitória, independente das jogadas de João. Isto é relativamente fácil para tabuleiros menores, mas para tabuleiros maiores, mesmo após várias jogadas, esta tarefa é mais difícil; por isso, ela pediu que você escrevesse um programa que, dada a situação do tabuleiro, decide se ela tem uma estratégia vencedora.

Entrada

A entrada contém vários casos de teste. A primeira linha de caso de teste contém um inteiro N, indicando o tamanho do tabuleiro ($3 \leq N \leq 10^4$). A linha seguinte contém uma sequência de N caracteres indicando quais casas do tabuleiro já foram ocupadas: um '.' indica que a casa correspondente está vazia, enquanto um X indica que a casa já teve uma cruz desenhada sobre ela. A entrada nunca contém três X consecutivos.

O último caso de teste é seguido por uma linha que contém um único número zero.

Saída

Para cada caso de teste da entrada seu programa deve imprimir uma única linha contendo um único caractere: S caso Maria possua uma estratégia vencedora e N caso contrário.

Exemplo de entrada	Exemplo de saída
5 ..... 5 ..X.. 6 X.X.X. 12 0	S N S N

Análise

Este jogo é da classe *Take-and-Break*. Uma observação: se o tabuleiro inicial possui dois X com uma distância menor ou igual a 2 um do outro, a resposta é imediatamente S, pois o jogador pode simplesmente marcar na terceira casa vaga. Essa é a primeira checagem que deve ser feita.

Após efetuar essa checagem, temos que tratar os outros casos. Repare que aqui sempre que há um X em uma casa, os jogadores não devem marcar em uma das duas casas a sua esquerda, nem em uma das duas casas a sua direita pelos motivos da primeira observação. Marcamos as casas proibidas (vizinhos dos X) com um X.

Após isso, repare que o tabuleiro fica possivelmente dividido em várias sequências contíguas de '.', que são aqui consideradas como pilhas. Como calcular o valor de Sprague-Grundy de cada pilha? Precisamos primeiro determinar quais são as posições alcançáveis por cada pilha (opções). Repare que em um caso geral, de uma pilha de tamanho n, podemos ir para pilhas de tamanhos $n-3$, $n-4$, $n-5$ e para pares de pilhas de tamanhos $(1, n-6)$, $(2, n-7)$, ..., $(n-6, 1)$, se aplicável.

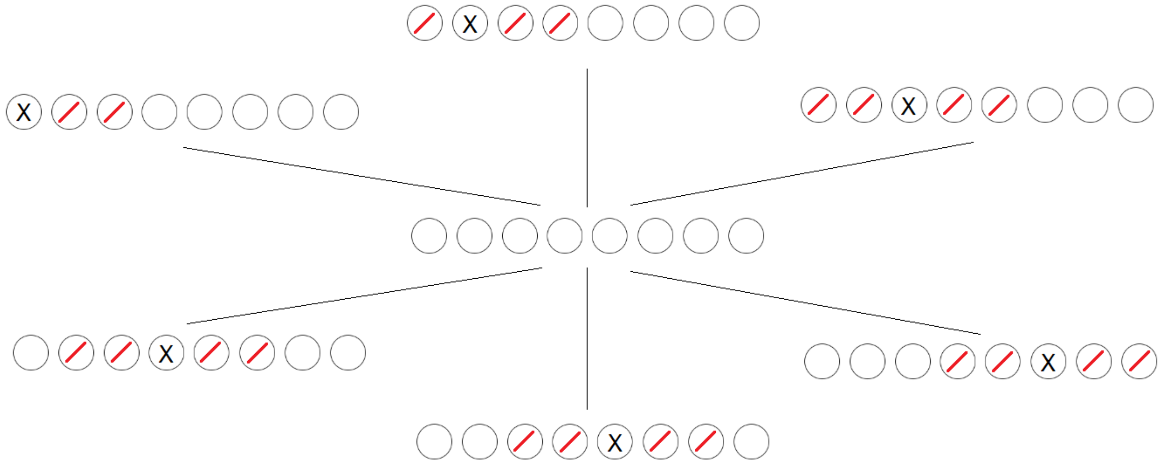

Figura 7.2: *Pilha de tamanho 8 e suas opções: pilhas de tamanhos 5, 4 e 3 e pares de pilhas de tamanhos 1 e 2. Casas proibidas foram marcadas de vermelho.*

Com as opções determinadas, fica simples calcular o valor de Sprague-Grundy de cada pilha (*mex* dos valores de Sprague-Grundy das opções). Daí, como o jogo pode ser visto como uma soma de pilhas individuais, basta tirar o XOR dos valores de cada pilha para obter o valor de Sprague-Grundy do jogo inteiro, e então decidir se há uma estratégia vencedora ou não.

Código da solução

O problema tem um tempo limite de execução estrito e calcular os valores de Sprague-Grundy no código estava demorando bastante. Portanto, uma alternativa é pré-calcular os valores de Sprague-Grundy e colar no código-fonte, que aqui está incompleto por motivos de poupar espaço na monografia.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

string s;

void marcaPosicoesInvalidas(vector<int> posicoesX) {
  for (int i : posicoesX) {
    for (int j=1; j<=2; j++) {
      if (i-j >= 0) s[i-j] = 'X';
      if (i+j <= int(s.size())-1) s[i+j] = 'X';
    }
  }
}

int SG[11234] = {0,1,1,1,2,2,0,3,3,1,1,1,0,4,...}

int main(){
```

```
  int n;
  while (cin >> n && n != 0) {
    cin >> s;

    int ultimaPosicaoX = -1;
    bool temXProximos = false;
    vector<int> posicoesX;

    for (int i=0; i<int(s.size()); i++) {
      if (s[i] == 'X') {
        posicoesX.push_back(i);
        if (ultimaPosicaoX != -1
          && i - ultimaPosicaoX <= 2) {
          cout << "S" << endl;
          temXProximos = true;
          break;
        }

        ultimaPosicaoX = i;
      }
    }

    if (temXProximos) continue;

    marcaPosicoesInvalidas(posicoesX);

    int tamanhoDaPilha = 0;
    int resultadoXor = 0;

    for (int i=0; i<n; i++) {
      if (s[i] == 'X') {
        resultadoXor ^= SG[tamanhoDaPilha];
        tamanhoDaPilha = 0;
      } else tamanhoDaPilha++;
    }

    resultadoXor ^= SG[tamanhoDaPilha];

    if (resultadoXor == 0)
      cout << "N" << endl;
    else
      cout << "S" << endl;
  }
}
```

Capítulo 8

Comentários finais

8.1 Conclusões

A partir dos conteúdos apresentados no texto, é possível obter um entendimento das mecânicas por trás de jogos imparciais. Tais jogos não são tão populares, e para o leitor que nunca teve um contato com eles, o capítulo 2 serve como um chute inicial.

Felizmente, jogos imparciais possuem regras relativamente bem simples de forma que é possível conhecer vários jogos em pouco tempo. Conhecer o jogo do Nim é fundamental para a teoria de jogos imparciais, pois muitos conceitos são baseados nele e generalizados para jogos mais complexos. Portanto, ele foi apresentado em um capítulo exclusivo e ao longo do texto, muitos outros jogos são expostos.

De forma similar, o teorema de Sprague-Grundy, possivelmente o mais importante teorema dentro de teoria de jogos imparciais, foi exposto em um capítulo exclusivo. Sua apresentação permite ao leitor generalizar conceitos matemáticos vistos com o jogo do Nim para outros jogos imparciais. Portanto, os capítulos seguintes - Jogos em pilhas e Teorema Generalizado de Sprague Grundy - servem para generalizar o jogo do Nim e teorema de Sprague-Grundy, respectivamente.

Ao fazer generalizações, os conteúdos apresentados tendem a ficar bastante abstratos e naturalmente mais difíceis de serem entendidos. Em vista disso, inclui muitas figuras (todas de minha autoria) para facilitar o entendimento e apresentei aspectos mais práticos no capítulo 7 - Algoritmos.

De maneira geral, acredito que as partes essenciais de teoria de jogos imparciais foram expostas, porém o texto deixa de abordar alguns aspectos - como por exemplo a forma Misère de jogos imparciais. Caso houvesse mais disponibilidade, um aspecto que gostaria de acrescentar ao texto é a apresentação de pelo menos alguns aspectos da teoria de jogos parciais, o que mudaria o tema de teoria de jogos imparciais para teoria combinatória dos jogos.

Para os leitores que desejem se aprofundar mais pelo tema, recomendo os livros *Combinatorial Game Theory*, de Aaron N. Siegel, e *Winning ways for your mathematical plays*, de Berlekamp, Conway e Guy. Os conteúdos do texto foram fortemente baseados no primeiro.

8.2 Apreciação pessoal

Quando estava no ensino médio, ganhei um livro chamado *Círculos Matemáticos: Uma Experiência Russa*, de Fomin, por meio de aulas para olimpíadas de matemática. Muitos conteúdos interessantes e em meio a toda a matemática recreativa apresentada, conheci os jogos imparciais e tive uma certa intriga por eles. Durante minha graduação, participei de estudos e atividades envolvendo competições de programação e elas impulsionaram ainda mais essa intriga ao ver sua ligação com algoritmos e computação.

Apesar de ver muitos problemas de programação envolvendo jogos imparciais, nunca havia estudado a teoria seriamente e a elaboração deste texto me fez conhecer jogos matemáticos muito mais a fundo. À primeira vista é um tanto estranho, mas percebi que a matemática relacionada a jogos é bem complexa. No início, quando estava pensando sobre o tema, tinha a ideia de escrever sobre teoria combinatória dos jogos, que envolve tanto jogos parciais quanto imparciais, mas desisti ao ver que apenas a parte de jogos imparciais tinha um conteúdo apropriado mais do que suficiente para ser abordado pelo texto. Me diverti conhecendo jogos novos e a teoria matemática me fez conectar os pontos entre eles, em especial o teorema de Sprague-Grundy (capítulo 4).

Colocando as partes técnicas de lado, devo admitir que desenvolver tal texto me fez admirar mais textos acadêmicos e livros técnicos bem escritos. Na hora de expor de maneira pessoal os tópicos estudados, não basta ter apenas conhecimento de conteúdos técnicos super-avançados. A elaboração da ordem lógica e a estruturação do texto, por exemplo, são habilidades que merecem tanto respeito quanto as tecnicalidades, mas que para um leitor são fáceis de passarem despercebidas.

Por fim, ressalto que o trabalho me ensinou muitas coisas. Em paralelo à elaboração do texto, passei por experiências pessoais que me amadureceram, mas que também afetaram meu foco no texto, e muitas vezes duvidei de mim mesmo. Apesar disso, meu interesse pelo tema foi suficiente para me colocar de volta nos trilhos e o envolvimento com jogos (algo que fazemos em tom descontraído) me possibilitou que eu conversasse sobre meu tema com pessoas ao meu redor, algumas até mesmo de outras faculdades e sem um interesse particular por matemática. Posso dizer que ao contrário das críticas e do estigma referentes à relação de matemática e jogos, expostos no capítulo 1, a beleza de tal relação se encontra no tom descontraído e casual que leva a um estudo prazeroso de matemática e computação.

Apêndice A

Pré-requisitos matemáticos

A.1 Grafos

Um grafo é um par de conjuntos. O primeiro é um conjunto de objetos denominados **vértices** que podem abstrair quaisquer objetos (números, palavras, cidades, etc.) e o segundo é um conjunto de objetos chamados de **arcos**. Um arco é um par ordenado de vértices, que por sua vez estão contidos no primeiro conjunto. [alg (2019)]

Dizemos que um vértice w é **vizinho** de um vértice v se há um arco (v, w) no conjunto de arcos. Repare que a relação não é simétrica, w pode ser vizinho de v sem que v seja vizinho de w. [alg (2019)]

Um **passeio** em um grafo é uma sequência de vértices tal que se v e w são vértices consecutivos na sequência, então (v, w) é um arco do grafo. Um **caminho** é um passeio sem arcos repetidos, isto é, os arcos são todos diferentes entre si. [alg (2019)]

A.2 Grupos

Um grupo é um conjunto G com uma operação binária $*$ sobre G que satisfaz os seguintes axiomas:

- *Associatividade.* Para todo x, y, z em G, $(x * y) * z = x * (y * z)$;
- *Elemento identidade.* Existe um elemento e em G, tal que, para todo x em G, $x * e = e * x = x$;
- *Elemento inverso.* Para todo x em G, existe x' em G tal que $x * x' = x' * x = e$.

Se $*$ é também uma operação binária sobre um subconjunto H de G, e H com tal operação satisfaz os axiomas de grupos, então dizemos que H é um **subgrupo** de G. Além disso, o subconjunto $xH = \{xh \mid h \in H\}$ de G é denominada **classe lateral à esquerda** de H contendo x, enquanto o subconjunto $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ de G é denominada **classe lateral à direita** de H contendo x. O número de classes laterais à esquerda de H em G é chamado de **índice** $(G : H)$ **de** H **em** G. [Fraleigh (2002)]

Referências Bibliográficas

alg(2019) Algoritmos para grafos, notas de paulo feofiloff. IME-USP, 2019. https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/. Citado na pág. 53

mit(2010) The mathematics in toys and games, course from mit. MIT, 2010. https://ocw.mit.edu/courses/experimental-study-group/es-268-the-mathematics-in-toys-and-games-spring-2010/. Citado na pág. 43

ucl(2000) Game theory, course from ucla. UCLA, 2000. https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html. Citado na pág. 19

wik(2019) Nim. Wikipedia, 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Nim. Citado na pág. 3

Berlekamp *et al.***(1982)** Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway e Richard K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays*, volume 1. Academic Press,. Citado na pág. 15

Fraleigh(2002) John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*, volume 1. Pearson Education,. Citado na pág. 53

Siegel(2013) Aaron N. Siegel. *Combinatorial Game Theory*. Number 146 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. Citado na pág. 3, 4, 14, 29