# Algoritmos em redes de fluxo e aplicações

Marcos Massayuki Kawakami
Orientador: José Coelho de Pina

Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

# Introdução

## Motivação

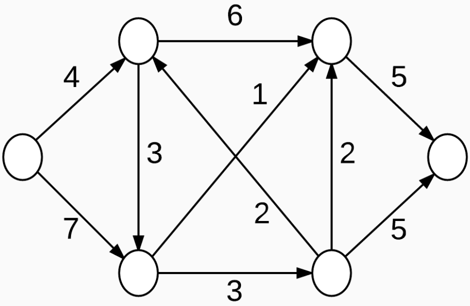
- Problemas envolvendo fluxos são recorrentes em competições de programação.
- Material em português sobre o tema focado em competições é escasso.

## Objetivos

- Elaborar um material didático sobre o tema de fluxos.
- Facilitar o acesso à informação

# Redes e fluxos

Uma **rede capacitada** é um grafo dirigido $(V, E)$ munido de uma função $u : E \to \mathbb{Q}^+$. O valor atribuído a cada aresta é chamado de **capacidade** da aresta.



# Redes e fluxos

Sejam $s$ e $t$ dois vértices de uma rede capacitada $(V, E, u)$. Um **fluxo** de $s$ a $t$ é uma função $f : E \to \mathbb{Q}^+$ que satisfaz:

# Redes e fluxos

Sejam $s$ e $t$ dois vértices de uma rede capacitada $(V, E, u)$. Um **fluxo** de $s$ a $t$ é uma função $f : E \to \mathbb{Q}^+$ que satisfaz:

- *(Condições de capacidade)* Para toda aresta $e \in E$,

$$f(e) \leq u(e).$$

# Redes e fluxos

Sejam $s$ e $t$ dois vértices de uma rede capacitada $(V, E, u)$. Um **fluxo** de $s$ a $t$ é uma função $f : E \to \mathbb{Q}^+$ que satisfaz:

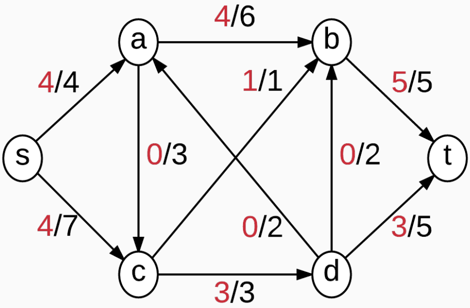
- *(Condições de capacidade)* Para toda aresta $e \in E$,

$$f(e) \leq u(e).$$

- *(Condições de conservação)* Para todo vértice $v$ diferente de $s$ e $t$,

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e).$$

Um exemplo de fluxo:



# Redes e fluxos

O **valor** de um fluxo $f$ é igual a quantidade de fluxo que sai de $s$. Pelas condições de conservação, este valor deve ser igual à quantidade de fluxo que entra em $t$.

$$|f| := \sum_{e \in E^-(s)} f(e) = \sum_{e \in E^+(t)} f(e)$$

# Redes e fluxos

O **valor** de um fluxo $f$ é igual a quantidade de fluxo que sai de $s$. Pelas condições de conservação, este valor deve ser igual à quantidade de fluxo que entra em $t$.

$$|f| := \sum_{e \in E^-(s)} f(e) = \sum_{e \in E^+(t)} f(e)$$

**Problema do fluxo máximo**

Dados dois vértices $s$ e $t$ de uma rede capacitada $(V, E, u)$, encontrar um fluxo de $s$ a $t$ de valor máximo.

# Redes e fluxos

O **valor** de um fluxo $f$ é igual a quantidade de fluxo que sai de $s$. Pelas condições de conservação, este valor deve ser igual à quantidade de fluxo que entra em $t$.

$$|f| := \sum_{e \in E^-(s)} f(e) = \sum_{e \in E^+(t)} f(e)$$

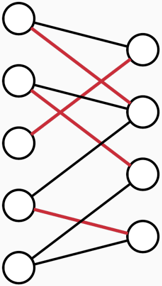
**Problema do fluxo máximo**

Dados dois vértices $s$ e $t$ de uma rede capacitada $(V, E, u)$, encontrar um fluxo de $s$ a $t$ de valor máximo.

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial no tamanho do grafo. Além disso, se $u$ for inteiro, é sempre possível encontrar um fluxo máximo $f$ inteiro.

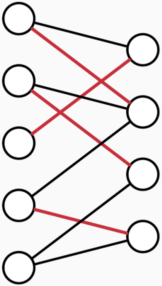
# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

Um **emparelhamento** em um grafo não-dirigido $G$ é um subconjunto $M$ das arestas de $G$ tal que todo vértice de $G$ é ponta de no máximo uma aresta de $M$.



# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

Um **emparelhamento** em um grafo não-dirigido $G$ é um subconjunto $M$ das arestas de $G$ tal que todo vértice de $G$ é ponta de no máximo uma aresta de $M$.



**Problema do emparelhamento bipartido máximo**

Dado um grafo bipartido, encontrar um emparelhamento de cardinalidade máxima.

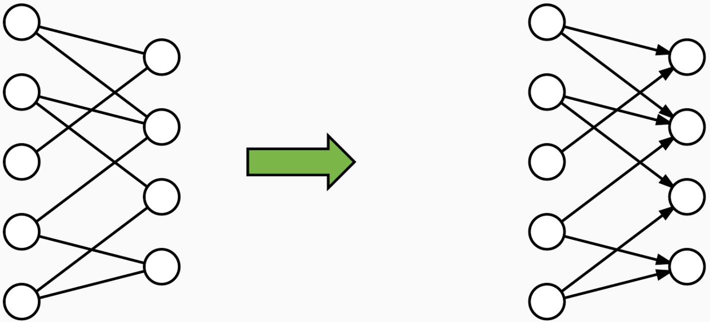
# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

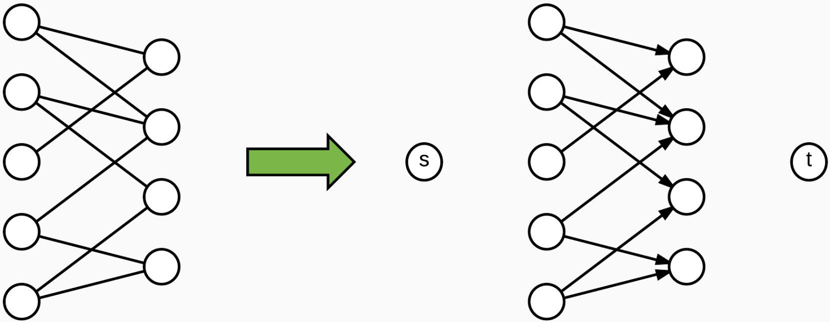
1. Direcionamos todas as arestas do grafo da esquerda para a direita.



# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

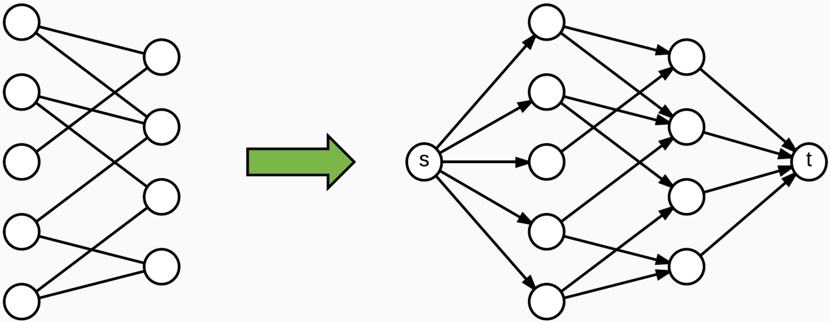
2. Adicionamos dois novos vértices $s$ e $t$.



## Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

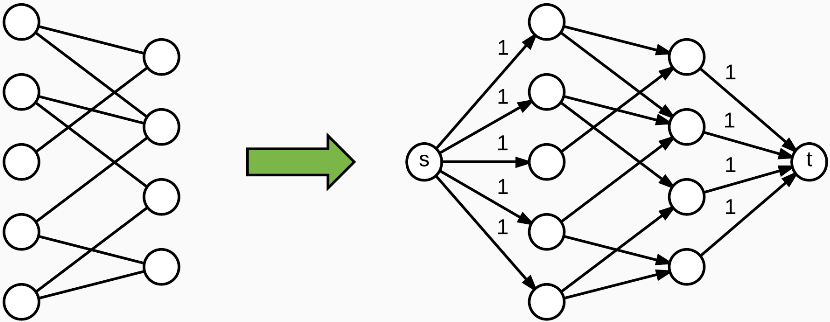
3. Ligamos $s$ a todos os vértices da esquerda, e todos os vértices da direita a $t$.



# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

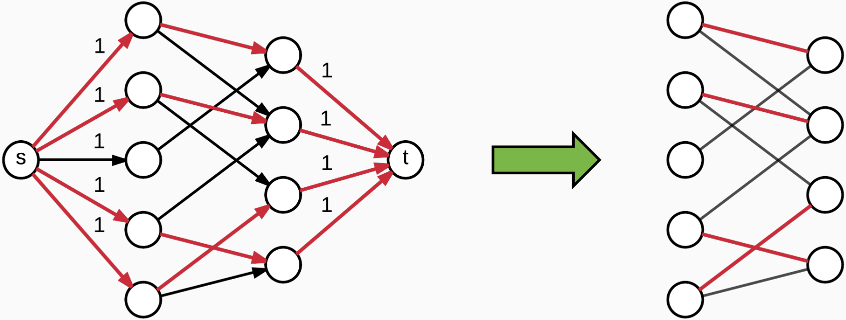
4. Todas as arestas recebem capacidade unitária.



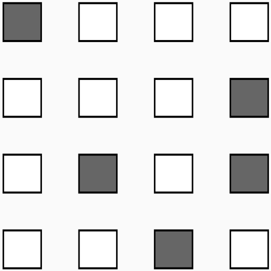
# Uma aplicação: emparelhamentos bipartidos

O problema do emparelhamento máximo bipartido pode ser modelado como uma instância do problema do fluxo máximo da seguinte maneira:

5. Um emparelhamento máximo no grafo original pode ser obtido de um fluxo máximo inteiro na rede construída.

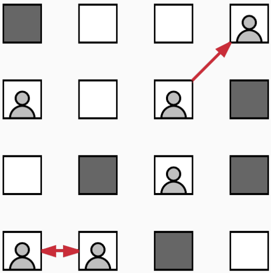


# Evitando colas durante uma prova



Queremos aplicar uma prova em uma sala de aula. Algumas das carteiras desta sala estão quebradas e não podem ser usadas.

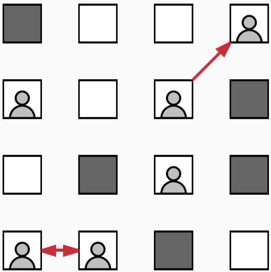
# Evitando colas durante uma prova



Queremos aplicar uma prova em uma sala de aula. Algumas das carteiras desta sala estão quebradas e não podem ser usadas.

Um aluno é capaz de colar de alunos sentados ao seu lado ou imediatamente a sua frente na diagonal.

# Evitando colas durante uma prova

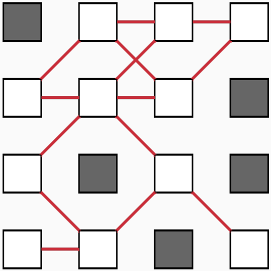


Queremos aplicar uma prova em uma sala de aula. Algumas das carteiras desta sala estão quebradas e não podem ser usadas.

Um aluno é capaz de colar de alunos sentados ao seu lado ou imediatamente a sua frente na diagonal.

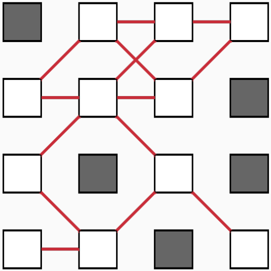
Qual o maior número de alunos que podem fazer a prova simultaneamente nesta sala sem que haja possibilidade de cola?

# Reduzindo para emparelhamentos



Considere o grafo em que as carteiras são os vértices e duas carteiras estão conectadas por uma aresta se existe risco de cola.

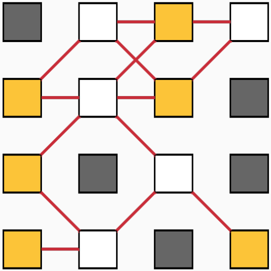
# Reduzindo para emparelhamentos



Considere o grafo em que as carteiras são os vértices e duas carteiras estão conectadas por uma aresta se existe risco de cola.

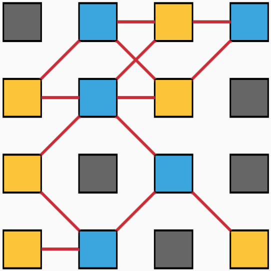
Este grafo é bipartido!

# Reduzindo para emparelhamentos



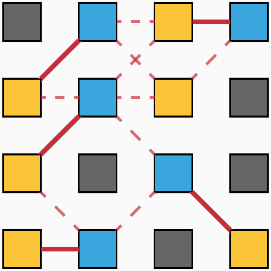
Estamos procurando um conjunto de vértices tal que não exista aresta entre dois vértices deste conjunto. Um conjunto com esta propriedade é chamado de **conjunto independente**.

# Reduzindo para emparelhamentos



O complementar de um conjunto independente é tal que toda aresta incide em algum vértice deste conjunto. Um conjunto com esta propriedade é chamado de **cobertura**.

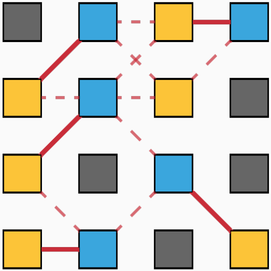
# Reduzindo para emparelhamentos



**Teorema de König**

Em um grafo bipartido, o tamanho de uma cobertura mínima é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

# Reduzindo para emparelhamentos



**Teorema de König**

Em um grafo bipartido, o tamanho de uma cobertura mínima é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

A resposta para o problema é a diferença entre a quantidade de carteiras disponíveis e o tamanho de um emparelhamento máximo.

# Conteúdo do material

- Teoria elementar sobre o tema de fluxos em rede.
- Implementações em C++ dos algoritmos estudados.
- Resolução de problemas de competições passadas.

Perguntas?