Algoritmos em redes de fluxo e aplicações

Marcos Massayuki Kawakami **Orientador: José Coelho de Pina**

Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

Introdução

Problemas cuja solução envolve o uso de algoritmos em redes de fluxo são recorrentes em competições de programação. No entanto, o estudo deste tema é muitas vezes prejudicado devido à escassez de material em língua portuguesa sobre o assunto com ênfase nessas competições. Assim, o estudo deste tema passa a depender fortemente da passagem de conhecimento de competidores mais experientes, reduzindo sua acessibilidade.

Por este motivo, este trabalho tem como principal objetivo servir de material de estudo para todos que têm interesse em se aprofundar no tema de fluxo em rede e nas suas aplicações na resolução em problemas no estilo da Maratona de Programação.

Redes e fluxos

Uma **rede capacitada** é um grafo (V, E) munido de uma função $u : E \to \mathbb{Q}^+$ que atribui um valor racional não-negativo para cada aresta do grafo. Este valor é denominado **capacidade** da aresta.

Sejam s e t dois vértices de uma rede (V, E, u). Um **fluxo de s a t** é uma função $f : E \to \mathbb{Q}^+$ que satisfaz as seguintes condições:

- (*Condições de capacidade*) Para cada aresta $e \in E$, o fluxo que passa por e deve ser menor ou igual a sua capacidade:
$$f(e) \le u(e);$$
- (*Condições de conservação*) Para cada vértice v diferente de s e t, a soma dos valores de f das arestas que entram em v deve ser igual à soma das arestas que saem de v:
$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e).$$

O **valor** de um fluxo f é igual a quantidade de fluxo que sai de s. Pelas condições de conservação, este valor deve ser igual à quantidade de fluxo que entra em t:
$$|f| := \sum_{e \in E^-(s)} f(e) = \sum_{e \in E^+(t)} f(e).$$

O problema do fluxo máximo: Dados uma rede capacitada e dois vértices s e t, encontrar um fluxo de s a t de valor máximo.

Uma aplicação: emparelhamentos máximos

Um **emparelhamento** em um grafo não-dirigido G é um subconjunto M das arestas de G tal que todo vértice de G é ponta de no máximo uma aresta de M.

O problema do emparelhamento máximo bipartido: Dado um grafo não-dirigido com bipartição (P, Q), encontrar um emparelhamento de cardinalidade máxima.

Este problema pode ser modelado como um problema do fluxo máximo em uma rede capacitada auxiliar construída da seguinte forma:

- Os vértices da rede são os vértices de G com a adição de dois vértices s e t.
- Ligamos o vértice s a todos os vértices de P e ligamos todos os vértices de Q a t com arestas de capacidade unitária;
- Todas as arestas de G são adicionadas à rede com capacidade infinita e direção de P para Q.

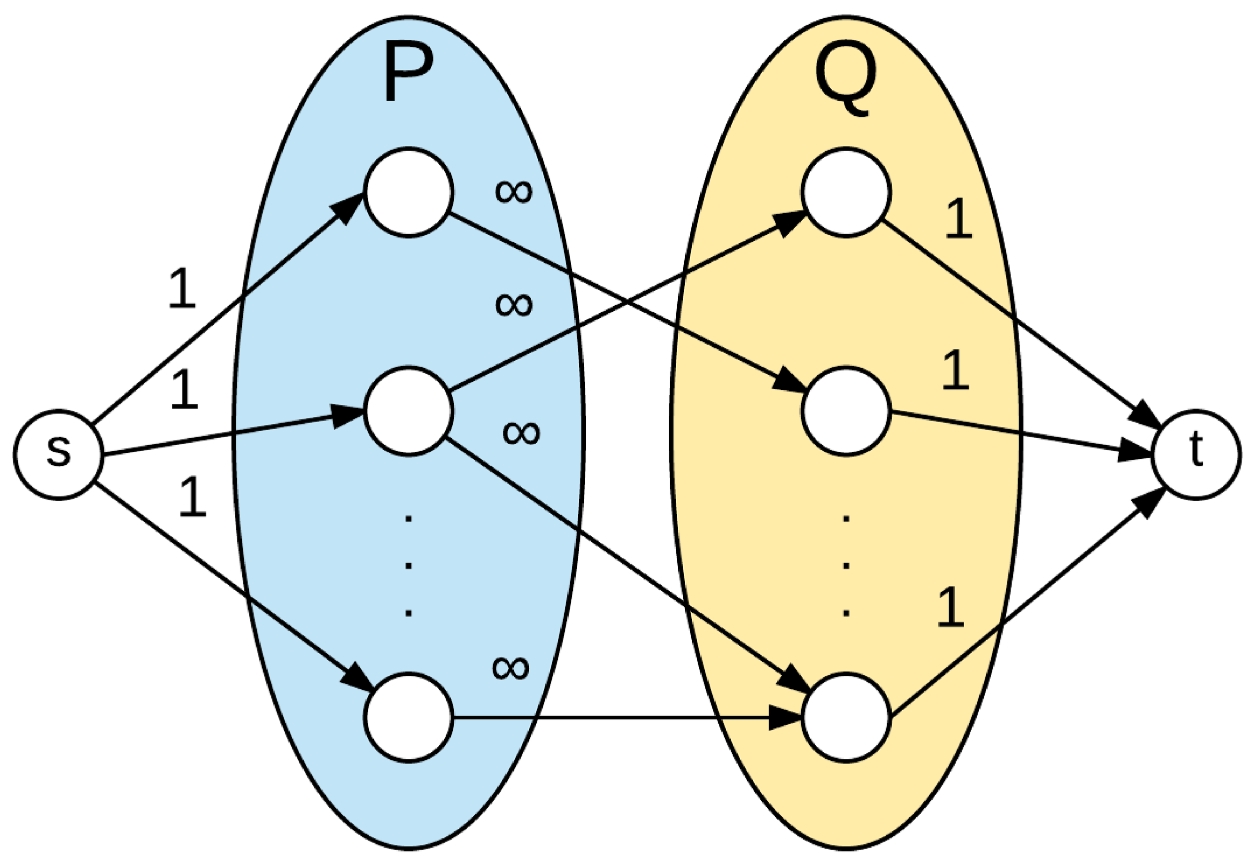

Figura: A rede auxiliar

O valor do fluxo máximo de s a t na rede construída é igual à cardinalidade de um emparelhamento máximo em G. Além disso, se f for um fluxo máximo inteiro, o conjunto das arestas restritas a G com valor de f positivo formam um emparelhamento máximo.

Evitando colas durante uma prova

Suponha que queremos aplicar uma prova numa sala de aula na qual as carteiras estão dispostas como um reticulado de dimensões $N \times M$. Algumas destas carteiras estão quebradas e não podem ser usadas.

Um aluno sentado em uma cadeira na posição (x, y) é capaz de colar de alunos sentados nas carteiras $(x-1, y)$, $(x-1, y+1)$, $(x+1, y)$ e $(x+1, y+1)$. Qual o maior número de alunos que podem fazer a prova ao mesmo tempo sem que alguém possa colar?

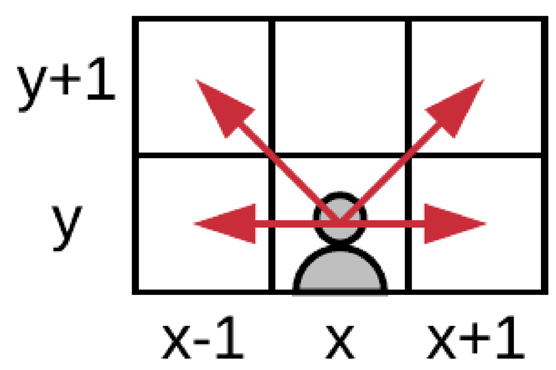

Figura: Carteiras das quais um aluno é capaz de colar.

As seguintes observações permitem modelar este problema como um problema do emparelhamento máximo bipartido:

- Considere o grafo não-dirigido cujos vértices são as carteiras da sala, e dois vértices estão conectados por uma aresta se um aluno sentado em uma das carteiras consegue colar de um aluno sentado na outra carteira. Este grafo possui uma bipartição dos vértices formada pelas carteiras em colunas pares e ímpares.
- Queremos encontrar um conjunto de vértices tal que não exista aresta entre dois vértices deste conjunto. Tal conjunto é chamado **conjunto independente**.
- O complementar de um conjunto independente é um conjunto tal que toda aresta incide em algum vértice deste conjunto. Tal conjunto é chamado **cobertura**.
- **Teorema de König:** Em um grafo bipartido, o tamanho de uma cobertura mínima é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

Assim, a resposta para o problema é o total de carteiras usáveis menos o tamanho do emparelhamento máximo no grafo mencionado.

Árvores de Gomory-Hu

Dada uma rede capacitada não-dirigida, um **corte** é uma partição (S, T) dos vértices. A **capacidade** de um corte é a soma das capacidades das arestas que saem de S e entram em T. Dados dois vértices s e t, um **s-t corte** é um corte (S, T) com $s \in S$ e $t \in T$.

R. E. Gomory e T. C. Hu [1] mostraram que existe uma representação compacta dos s-t cortes de capacidade mínima para todos os pares de vértices s e t de uma rede.

Uma **árvore de Gomory-Hu** de uma rede capacitada não-dirigida G é uma árvore capacitada T que possui o mesmos vértices de G e tem as seguintes propriedades:

- (*Fluxo-equivalência*) Para qualquer par de vértices s e t, o fluxo máximo de s a t em G é igual ao fluxo máximo de s a t em T;
- (*Cortes mínimos*) Qualquer corte mínimo em T é um corte mínimo em G de mesma capacidade.

Assim, dada uma árvore de Gomory-Hu de uma rede G, um s-t corte mínimo em G pode ser facilmente obtido tomando o corte induzido pelas componentes conexas resultantes da remoção da aresta de menor capacidade no caminho de s a t na árvore.

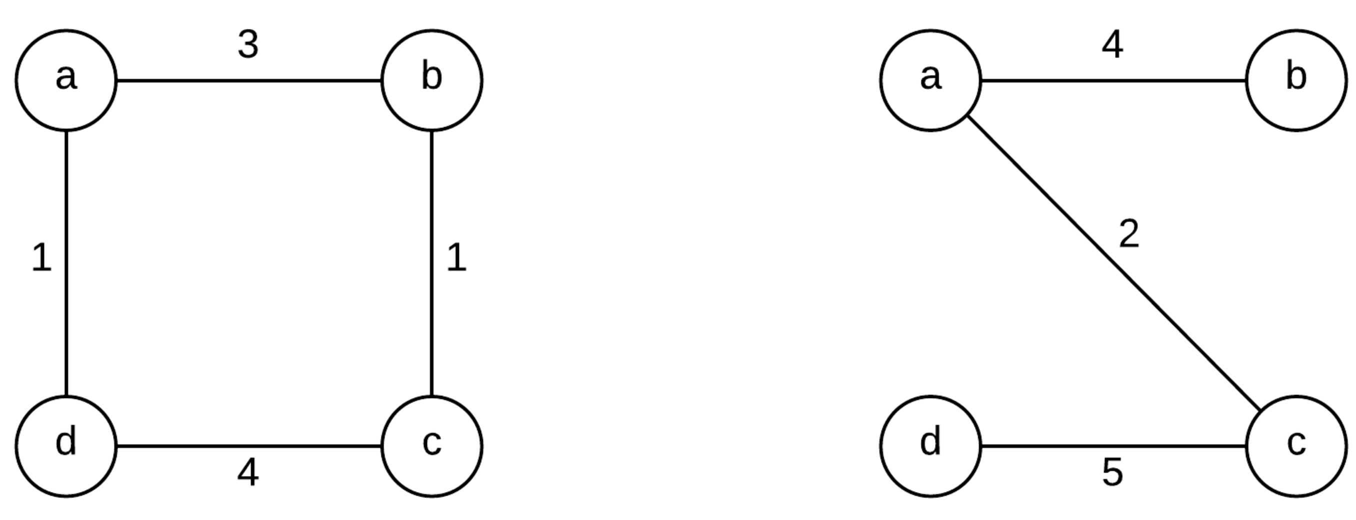

Figura: Uma rede capacitada G e uma árvore de Gomory-Hu de G.

Neste trabalho analisamos e implementamos o algoritmo de Gusfield [2], que constrói uma árvore de Gomory-Hu de uma rede (V, E, u) por meio de $|V| - 1$ cálculos de fluxo máximo.

Informações e contato

Página do trabalho: https://linux.ime.usp.br/~marcosk/mac0499/
Email: marcos.kawakami@usp.br

Referências

[1] R. E. Gomory e T. C. Hu. "**Multi-terminal network flows**." *SIAM J. Appl. Math*, 1961, 9(4):551–570.

[2] Dan Gusfield. "**Very simple methods for all pairs network flow analysis**." *SIAM J. Comput.*, 1990, 19(1):143-155.