PROJETO DE MAC0499 - TRABALHO DE CONCLUSÃO SUPERVISIONADO

ALGORITMOS QUASE LINEARES PARA FLUXOS EM GRAFOS

MARCEL K. DE CARLI SILVA E VICTOR SANCHES PORTELLA

RESUMO. Este é o projeto de Victor Sanches Portella para a matéria de Trabalho de Formatura Supervisionado, a ser desenvolvido sob a supervisão de Marcel Kenji de Carli Silva, no Instituto de Matemática e Estatística da USP, durante o ano de 2016. O principal objetivo do projeto é o estudo de algoritmos rápidos (quase lineares) para fluxos em grafos baseados em esparsificação, redes elétricas e outras técnicas espectrais. O estudo envolverá monografias e artigos recentes (dos últimos 5 anos) e permitirá ao aluno se familiarizar com algumas técnicas algorítmicas modernas e de amplo potencial de aplicação, aproximando-se da fronteira de pesquisa nessa área.

1. Motivação

O problema do *fluxo máximo* em grafos é um dos mais antigos e mais bem estudados em otimização combinatória. Sua primeira menção foi feita por Harris e Ross como um modelo simplificado do fluxo do sistema ferroviário soviético. Desde então, foram encontradas inúmeras aplicações, sendo que vários outros problemas usam fluxo máximo como sub-rotina.

Diversos algoritmos eficientes foram desenvolvidos para esse problema durante as primeiras décadas de seu estudo. Estes são baseados essencialmente em abordagens combinatórias, envolvendo caminhos aumentadores, fluxos bloqueadores, pré-fluxos e o método conhecido como *push-relabel*. Essa linha de pesquisa culminou recentemente com o algoritmo $O(mn)$ de Orlin, resolvendo assim um problema em aberto há mais de 30 anos; aqui, como usual, m denota o número de arestas e n o número de vértices da instância do problema.

Historicamente, um algoritmo é considerado *eficiente* se consome tempo polinomial no tamanho da entrada, como proposto inicialmente por Edmonds e Cobham em 1965. Essa noção de eficiência se mostrou uma excelente escolha, uma vez que, em grande parte, os problemas que conseguimos resolver eficientemente na prática coincidem com aqueles para os quais conhecemos algoritmos polinomiais. Polinomialidade se firmou também como "a noção correta" de tratabilidade em outras áreas, como por exemplo em complexidade computacional. Entretanto, com a recente explosão na quantidade de dados disponíveis (fenômeno algumas vezes chamado de *Big Data*), aplicações recentes têm envolvido a resolução de instâncias enormes de diversos problemas, para as quais algoritmos que consomem tempo quadrático já se tornam inviáveis de serem executados, tanto por limitações de tempo como também de espaço. Por causa disso, há um grande interesse atualmente em algoritmos que consomem tempo quase linear[1], mesmo ao custo de obter uma soluções apenas aproximadamente ótimas[2].

Um algoritmo quase linear revolucionário é o resolvedor de sistemas lineares de Spielman e Teng [25]; esse algoritmo resolve de forma aproximada sistemas lineares da forma $Ax = b$, onde A é uma matriz simétrica e diagonalmente dominante (isto é, $A_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$ para todo i), em tempo $\tilde{O}(m \log {}^1\!/\!_\varepsilon)$, onde m é o número de entradas não nulas de A e $\varepsilon > 0$ é a tolerância de erro.

Data: 8 de abril de 2016

[1]Não parece haver ainda um consenso sobre a definição de algoritmo *quase linear*, mas uma das mais populares é a de que o algoritmo deve consumir tempo $\tilde{O}(n)$, onde n é o tamanho da entrada; a notação "*soft Oh*", definida como $\tilde{O}(f(n)) = \bigcup_{k=0}^{\infty} O(f(n) \log^k n)$, esconde fatores polinomiais de $\log n$. Outra noção é mais vaga e parece referir-se mais à superação das "barreiras naturais", como $\Omega(mn)$ no caso do fluxo máximo; vide [4, 17].

[2]Normalmente, dado uma tolerância $\varepsilon > 0$ de erro, o consumo de tempo do algoritmo provavelmente envolverá o termo ${}^1\!/\!_\varepsilon$ ou, mais desejavelmente, $\log {}^1\!/\!_\varepsilon$. Por exemplo, o consumo de tempo poderia ser, "idealmente", $\tilde{O}(n \log {}^1\!/\!_\varepsilon)$.

Essa contribuição seminal de Spielman e Teng explora propriedades combinatórias de um sistema linear usando ferramentas como laplacianos de grafos, redes elétricas, pré-condicionadores recursivos, esparsificadores espectrais e árvores geradoras de *low stretch*. Assim, ferramentas combinatórias e da teoria da computação foram usadas de forma decisiva para melhorar um algoritmo para um problema de álgebra linear computacional.

Por sua vez, esses resolvedores quase lineares (o algoritmo de Spielman e Teng foi posteriormente melhorado e simplificado em [5, 14, 15]) e as ideias relacionadas têm sido usados como uma "primitiva" em algoritmos quase lineares para diversos problemas combinatórios, como proposto por Teng [27], no que ele chamou de "*paradigma laplaciano*". Dentre os problemas já atacados com sucesso usando esse novo paradigma, destacam-se particionamento espectral [24], esparsificação [23], amostragem de árvores geradoras aleatórias, multi-fluxos (*multicommodity flows*) [12, 13], cortes [4] e, de particular interesse para este projeto, fluxos em grafos [4, 12, 16, 20, 22].

Neste projeto, é esperado que o aluno se familiarize com diversas das técnicas e métodos utilizados por esses algoritmos, que se encaixam no paradigma laplaciano. Isso lhe beneficiará de diversas formas: além de ficar a par com alguns algoritmos no estado-da-arte para fluxo máximo, ele obterá uma compreensão aprofundada desses métodos, que têm um alto potencial de aplicação em diversos problemas, tanto em combinatória, quanto em áreas como aprendizado de máquina e processamento de imagens. Pretende-se também que a monografia seja escrita em inglês, provendo ao aluno uma ótima oportunidade de aprender boas práticas de confecção de textos acadêmicos.

2. Objetivos e justificativa

Um dos objetivos deste projeto é que o aluno tenha contato com métodos recentes e poderosos de ciência da computação teórica, de modo a obter proficiência no uso de ferramentas e técnicas que possam ajudá-lo a atacar algoritmicamente diversos problemas. Como destacado na seção 1, o campo de aplicabilidade de tais ideias é vasto.

Existe interesse especial nas técnicas envolvidas no resolvedor quase linear de Spielman e Teng e suas aplicações para problemas combinatórios. Devido à grande abrangência do tema, o projeto será focado em aplicações dessas técnicas para o problema do fluxo máximo. Foram assim selecionados alguns textos dessa crescente literatura, escolhendo artigos de modo a maximizar a exposição do aluno a métodos gerais (em oposição, por exemplo, a técnicas *ad hoc* que forneçam um melhor tempo de execução).

Pode-se citar alguns temas que serão estudados durante esse projeto, como: resolução de sistemas lineares simétricos e diagonalmente dominantes; propriedades espectrais do laplaciano e sua relação com redes elétricas, passeios aleatórios e esparsificadores de grafos; particionamento de grafos; método de atualização multiplicativa de pesos; métodos de pontos interiores. Uma descrição completa dos tópicos que pretende-se cobrir pode ser encontrada na seção 3.

Ademais, a monografia será escrita em inglês para que o aluno ganhe familiaridade com a escrita acadêmica nessa língua.

3. Tópicos específicos de pesquisa

A seguir está listada a bibliografia que será seguida dentro deste projeto.

3.1. $Lx = b$. *Laplacian Solvers and Their Algorithmic Applications (Vishnoi) [28].*

Esta é uma resenha sobre algoritmos quase lineares para sistemas lineares de equações da forma $Lx = b$, onde L é a matriz laplaciana de um grafo. A monografia é bastante abrangente e é dividida em três partes, todas as quais pretendemos cobrir:

(1) Pré-requisitos: esta parte inclui uma revisão de álgebra linear e uma introdução à teoria espectral de grafos, com ênfase em propriedades do laplaciano. Outro assunto central é a interpretação de um grafo como uma rede elétrica e o estudo de objetos relacionados, como por exemplo o conceito central de *resistência efetiva*.

(2) Aplicações: são listadas aplicações tanto de propriedades espectrais como também dos algoritmos quase lineares para sistemas laplacianos. Inclui-se aqui algoritmos para particionamento espectral de grafos, algoritmos envolvendo o exponencial de um laplaciano e passeios aleatórios, esparsificação de grafos, fluxo máximo e cortes. Alguns capítulos desta parte omitem diversos detalhes importantes (inclusive sobre o algoritmo para fluxo máximo) e devem ser vistos como uma introdução geral ao respectivo assunto.
(3) Ferramentas: esta seção trata de algoritmos iterativos da álgebra linear numérica e teoria da aproximação, como por exemplo o algoritmo de Kaczmarz, os métodos da descida e de gradiente conjugado, pré-condicionamento e o algoritmo de Lanczos.

Bibliografia complementar. Essa monografia faz uso de conceitos fundamentais de álgebra linear que algumas vezes não são cobertos em cursos, como por exemplo a pseudoinversa de Moore-Penrose. Também faz-se um uso intenso de decomposição espectral de matrizes simétricas e outras propriedades de autovalores. Incluem-se assim as seguintes referências para consulta de acordo com a necessidade do aluno: [9, 10, 11, 26].

3.2. ***Electrical Flows, Laplacian Systems, and Faster Approximation of Maximum Flow in Undirected Graphs (Christiano, Kelner, Mądry, Spielman e Teng) [4].*** Este é um artigo muito recente que descreve um algoritmo $\tilde{O}(mn^{1/3}\varepsilon^{-11/3})$ para o problema do fluxo máximo em grafos não dirigidos, superando assim o algoritmo de Goldberg e Rao [8] de 1998, cujo consumo de tempo é $\tilde{O}(mn^{1/2}\varepsilon^{-1})$. O algoritmo envolve os conceitos de redes elétricas e congestão e utiliza o versátil "método de atualização multiplicativa de pesos" (*multiplicative weights update method*). O artigo também faz uso do método de "suavização de grafos" (*graph smoothing*) e de esparsificação.

Bibliografia complementar. Para uma compreensão profunda dos métodos envolvidos, é necessário cobrir também partes de [1] para o método de atualização multiplicativa de pesos e [3] para o método de suavização de grafos. Além disso, pretende-se estudar os capítulos relevantes de [19], que contêm alguns detalhes a mais por se tratar de uma tese.

Vale ressaltar que o algoritmo apresentado em [4] não é o mais rápido conhecido; o consumo de tempo foi posteriormente melhorado em [12, 22]. Estes últimos algoritmos, entretanto, utilizam técnicas muito especializadas para problemas de fluxo, limitando assim o potencial de aplicabilidade em outros problemas. Acredita-se que será mais útil ao aluno estudar técnicas mais amplas, como as utilizadas no artigo escolhido [4], mesmo que não forneçam o melhor consumo de tempo conhecido.

3.3. ***Navigating Central Path with Electrical Flows: from Flows to Matchings, and Back (Mądry) [20].*** Este artigo combina técnicas clássicas de otimização combinatória e emprega ideias de métodos de pontos interiores para obter um algoritmo $\tilde{O}(m^{10/7})$ para o problema do fluxo máximo num grafo *dirigido* com capacidades unitárias. Para aplicar o paradigma laplaciano num problema sobre grafos dirigidos, Mądry inicialmente o reduz ao problema do b-emparelhamento capacitado num grafo bipartido. Este último problema é mais suscetível ao uso de algoritmos quase lineares, por envolver grafos não orientados, e por sua vez é atacado utilizando-se de uma interpretação de métodos de pontos interiores e outras ferramentas do paradigma laplaciano.

Como acima, este algoritmo não é o mais rápido para o problema do fluxo máximo num grafo dirigido, tendo sido superado recentemente por [16]. Entretanto, o artigo [16] é técnico demais para ser estudado e seria mais apropriado para um projeto longo e inteiramente dedicado a isso. Acredita-se que o estudo de [20] será uma introdução adequada aos objetivos deste projeto.

Bibliografia complementar. O material de apoio para leitura deste artigo consiste em trechos selecionados de [6] e [21].

4. Cronograma e plano de trabalho

(1) *Primeiro quadrimestre de 2016*: Inicialmente, o aluno deverá consolidar seu conhecimento básico sobre propriedades espectrais de grafos e suas conexões com separadores esparsos, redes elétricas, passeios aleatórios, pré-condicionadores e algoritmos quase lineares para resolução de sistemas lineares simétricos e diagonalmente dominantes. Esse estudo será feito através da monografia [28] e dos capítulos sobre ferramentas da tese [19].

Como material de apoio para tal leitura, listamos [9, 10, 26] para álgebra linear e [7, 18, 29] para a conexão entre propriedades espectrais do laplaciano de um grafo com redes elétricas e passeios aleatórios. Tais fontes serão consultadas apenas de acordo com a necessidade.

(2) *Segundo quadrimestre de 2016*: Tendo as bases consolidadas, o aluno irá estudar o artigo [4], consultando mais detalhes no capítulo correspondente da tese [19]. O artigo [4] é longo e bastante técnico, e necessitará muita dedicação para que o algoritmo apresentado seja completamente compreendido.

O material de apoio para o estudo deste artigo consiste das técnicas de "suavização de grafos" (*graph smoothing*) [2] e do "método de atualização multiplicativa de pesos" (*multiplicative weights update method*) [1].

(3) *Terceiro quadrimestre de 2016*: Nesse estágio, o aluno já terá se familiarizado com as ferramentas básicas da área e já terá visto seu uso em pelo menos um algoritmo. Ele passará então ao estudo do artigo [20], que trata de fluxos em grafos dirigidos. Este também é um artigo muito longo e técnico, portanto o plano de cobri-lo em um quadrimestre é bem ambicioso. Porém, ele tem pontos naturais de parada, de modo que um estudo potencialmente incompleto ainda seria muito proveitoso.

A escrita da monografia será feita durante todo o ano em paralelo aos estudos dos textos e assuntos citados. Espera-se que, ao final de cada quadrimestre, a escrita sobre os assuntos estudados nesse mesmo período esteja próxima de completa.

4.1. **Progresso atual.** O projeto vem sendo desenvolvido desde o começo do ano e o aluno está dentro do cronograma proposto. Como esperado, o estudo de [28] está quase completo e o aluno já escreveu sobre alguns dos temas estudados. O aluno obteve bolsa de iniciação científica da FAPESP para o desenvolvimento desse projeto durante o ano de 2016.

Bibliografia

[1] S. Arora, E. Hazan e S. Kale. “The multiplicative weights update method: a meta-algorithm and applications”. Em: *Theory Comput.* 8 (2012), páginas 121–164 (ver páginas 3, 4).

[2] A. A. Benczúr e D. R. Karger. *Randomized Approximation Schemes for Cuts and Flows in Capacitated Graphs.* Julho de 2002. arXiv: cs/0207078. URL: http://arxiv.org/abs/cs/0207078v1 (ver página 4).

[3] A. A. Benczúr e D. R. Karger. “Randomized approximation schemes for cuts and flows in capacitated graphs”. Em: *SIAM J. Comput.* 44.2 (2015), páginas 290–319 (ver página 3).

[4] P. Christiano, J. A. Kelner, A. Mądry, D. A. Spielman e S.-H. Teng. *Electrical Flows, Laplacian Systems, and Faster Approximation of Maximum Flow in Undirected Graphs.* Outubro de 2010. arXiv: 1010.2921 [cs.DS]. URL: http://arxiv.org/abs/1010.2921 (ver páginas 1–4). Versão completa de “Electrical flows, Laplacian systems, and faster approximation of maximum flow in undirected graphs”. Em: *STOC'11—Proceedings of the 43rd ACM Symposium on Theory of Computing.* ACM, 2011, páginas 273–281. STOC Best Paper Award.

[5] F. Chung e O. Simpson. “Solving linear systems with boundary conditions using heat kernel pagerank”. Em: *Algorithms and models for the web graph.* Volume 8305. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, 2013, páginas 203–219 (ver página 2).

[6] S. I. Daitch e D. A. Spielman. *Faster Approximate Lossy Generalized Flow via Interior Point Algorithms.* Versão 2. Abril de 2008. arXiv: 0803.0988 [cs.DS]. URL: http://arxiv.org/abs/0803.0988 (ver página 3). Versão completa de “Faster approximate lossy generalized flow via interior point algorithms”. Em: *STOC'08.* ACM, New York, 2008, páginas 451–460.

[7] P. G. Doyle e J. L. Snell. *Random Walks and Electric Networks.* Janeiro de 2000. arXiv: math/0001057 [math.PR]. URL: http://arxiv.org/abs/math/0001057 (ver página 4).

[8] A. V. Goldberg e S. Rao. “Beyond the flow decomposition barrier”. Em: *J. ACM* 45.5 (1998), páginas 783–797 (ver página 3).

[9] P. R. Halmos. *Finite-dimensional vector spaces.* 2ª edição. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1974. viii+200 (ver páginas 3, 4).

[10] R. A. Horn e C. R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, 1990. xiv+561 (ver páginas 3, 4).

[11] R. A. Horn e C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis.* Cambridge University Press, 1994. viii+607 (ver página 3).

[12] J. A. Kelner, Y. T. Lee, L. Orecchia e A. Sidford. *An Almost-Linear-Time Algorithm for Approximate Max Flow in Undirected Graphs, and its Multicommodity Generalizations.* Setembro de 2013. arXiv: 1304.2338 [cs.DS]. URL: http://arxiv.org/abs/1304.2338 (ver páginas 2, 3). Versão completa de “An Almost-Linear-Time Algorithm for Approximate Max Flow in Undirected Graphs, and its Multicommodity Generalizations”. Em: *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.* SIAM, 2014, páginas 217–226. SODA Best Paper Award.

[13] J. A. Kelner, G. L. Miller e R. Peng. “Faster approximate multicommodity flow using quadratically coupled flows”. Em: *STOC'12—Proceedings of the 2012 ACM Symposium on Theory of Computing.* ACM, 2012, páginas 1–17 (ver página 2).

[14] J. A. Kelner, L. Orecchia, A. Sidford e Z. A. Zhu. “A simple, combinatorial algorithm for solving SDD systems in nearly-linear time”. Em: *STOC'13—Proceedings of the 2013 ACM Symposium on Theory of Computing.* ACM, 2013, páginas 911–920 (ver página 2).

[15] I. Koutis, G. L. Miller e R. Peng. “Approaching optimality for solving SDD linear systems”. Em: *IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2010.* IEEE Computer Soc., 2010, páginas 235–244 (ver página 2).

[16] Y. T. Lee e A. Sidford. “Path-Finding Methods for Linear Programming : Solving Linear Programs in $\tilde{O}(\sqrt{\text{rank}})$ Iterations and Faster Algorithms for Maximum Flow”. Em: *Proceedings of the 55th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS).*

2014, páginas 424–433. Best Paper Award and Machtey Award for Best Student Paper (ver páginas 2, 3).

[17] Y. T. Lee e H. Sun. *Constructing Linear-Sized Spectral Sparsification in Almost-Linear Time*. Agosto de 2015. arXiv: 1508.03261 [cs.DS]. URL: http://arxiv.org/abs/1508.03261 (ver página 1). Versão completa de *Constructing Linear-Sized Spectral Sparsification in Almost-Linear Time*. 56th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 18–20 de outubro de 2015.

[18] L. Lovász. "Random walks on graphs: a survey". Em: *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993)*. Volume 2. Bolyai Soc. Math. Stud. János Bolyai Math. Soc., 1996, páginas 353–397. URL: http://www.cs.elte.hu/~lovasz/erdos.pdf (acesso em 05/11/2015) (ver página 4).

[19] A. Mądry. "From Graphs to Matrices, and Back: New Techniques for Graph Algorithms". Tese de doutorado. Massachusetts Institute of Technology, 2011 (ver páginas 3, 4).

[20] A. Mądry. *Navigating Central Path with Electrical Flows: from Flows to Matchings, and Back*. Outubro de 2013. arXiv: 1307.2205 [cs.DS]. URL: http://arxiv.org/abs/1307.2205 (ver páginas 2–4). Versão completa de "Navigating Central Path with Electrical Flows: from Flows to Matchings, and Back". Em: *Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. 2013, páginas 253–262. FOCS Best Paper Award.

[21] J. Renegar. *A mathematical view of interior-point methods in convex optimization*. MPS/SIAM Series on Optimization. SIAM, 2001. viii+117 (ver página 3).

[22] J. Sherman. "Nearly Maximum Flows in Nearly Linear Time". Em: *Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. 2013, páginas 263–269. Machtey Award for Best Student Paper (ver páginas 2, 3).

[23] D. A. Spielman e N. Srivastava. "Graph sparsification by effective resistances". Em: *SIAM J. Comput.* 40.6 (2011), páginas 1913–1926 (ver página 2).

[24] D. A. Spielman e S.-H. Teng. "Nearly linear time algorithms for preconditioning and solving symmetric, diagonally dominant linear systems". Em: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 35.3 (2014), páginas 835–885 (ver página 2).

[25] D. A. Spielman e S.-H. Teng. "Nearly-linear Time Algorithms for Graph Partitioning, Graph Sparsification, and Solving Linear Systems". Em: *Proceedings of the Thirty-sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '04. New York, NY, USA: ACM, 2004, páginas 81–90 (ver página 1).

[26] G. Strang. *Linear algebra and its applications*. 2ª edição. Academic Press, 1980. xi+414 (ver páginas 3, 4).

[27] S.-H. Teng. "The Laplacian paradigm: emerging algorithms for massive graphs". Em: *Theory and applications of models of computation*. Volume 6108. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, 2010, páginas 2–14 (ver página 2).

[28] N. K. Vishnoi. "$Lx = b$ Laplacian solvers and their algorithmic applications". Em: *Found. Trends Theor. Comput. Sci.* 8.1-2 (2012), páginas 1–141 (ver páginas 2, 4).

[29] D. Wagner. *Combinatorics of Electrical Networks*. 2009. URL: http://www.math.uwaterloo.ca/~dgwagner/Networks.pdf (acesso em 05/11/2015) (ver página 4).

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, R. do Matão 1010, 05508–090, São Paulo, SP

Endereços Eletrônicos: victor.portella@usp.br, mksilva@ime.usp.br