Modelo de Melhor Defesa em Jogos com Informação Incompleta: um estudo de caso com Bridge

Fábio Takashi Hirano
Supervisor: Prof. Dr. Flávio Soares Correa da Silva

3 de dezembro de 2012

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Na Teoria dos Jogos, jogos com Informação Incompleta são aqueles em que o jogador não tem pleno conhecimento sobre os resultados de suas jogadas, uma vez que não conhece as estratégias do adversário. Usualmente, encontrar uma estratégia ótima para tais jogos é um problema NP-Difícil e, portanto, uma abordagem heurística se faz necessária para o desenvolvimento de suas soluções e algoritmos.

Um exemplo de jogo com informação imperfeita que permite tal abordagem é o jogo de cartas *Bridge*. As tentativas de automatização do jogo de Bridge, em geral, envolvem diminuir o espaço de jogadas possíveis, dividindo o problema em sub-problemas para cada um dos naipes.

O presente trabalho parte da tentativa de formalizar o jogo de Bridge (e outros jogos com informação incompleta) com um modelo que se assemelhe à maneira humana de jogar. O "Modelo da Melhor Defesa"é resultado dessa modelagem. Mostraremos que o conceito de *Ponto de Equilíbrio* para um jogo com informação imperfeita de 2 jogadores é bem definido para esse modelo e descreveremos o algoritmo de *Minimização Exaustiva de Estratégias* que encontra tais pontos. O trabalho é baseado em [FB98], com as definições de Teoria dos Jogos formalizadas em [NM44].

Capítulo 2

Conceitos

Esse capítulo é baseado no trabalho de Ian Frank e David Basin [FB98]. Nele, é desenvolvido um algoritmo para busca em jogos com informação incompleta, exemplificado com uma aplicação ao jogo de cartas Bridge.

2.1 Conceitos de Teoria dos Jogos

Para descrever o algoritmo, são necessárias algumas definições advindas da Teoria dos Jogos e presentes no livro de von Neumann e Morgenstern [NM44].

2.1.1 Jogos em Forma Extensiva

Os Jogos na Forma Extensiva são uma maneira de modelar jogos em que a ordem das jogadas é importante como, por exemplo, o Xadrez ou o Bridge.

Na sua Forma Extensiva, um Jogo G pode ser representado por uma árvore finita $T(G)$. Cada um de seus nós v corresponde a um *movimento*, isto é, uma decisão realizada dentro do jogo. Os movimentos podem ser classificados de duas maneiras:

- Movimentos *Pessoais*, que são aqueles determinados livremente por um dos jogadores. Por exemplo, no Xadrez, todos os movimentos são considerados pessoais

- Movimentos *Aleatórios*, que são aquele determinados por uma dada distribuição de probabilidade. Por exemplo, em jogos de tabuleiro em que a movimentação do peão é determinada pela jogada de um dado.

O primeiro nó p_0 é a raiz da árvore e representa o início do jogo. Uma *jogada* α representa um caminha percorrido em $T(G)$ desde p_0 até uma folha. Cada jogador i associa a cada uma das folhas um valor $K_i(\alpha)$, chamado de *ganho*. A função K_i é chamada de *Função Utilidade*.

Ao realisar um movimento pessoal, o jogador pode não ter certeza sobre os movimentos que aconteceram no jogo até aquele momento. Além disso, o próprio movimento e seu resultado podem permanecer ocultos para os outros jogadores. Ou seja, é possível que, em qualquer movimento, o jogador não tenha certeza da posição atual do jogo na árvore $T(G)$. Num jogo na forma extensiva, essa situação é representada pelos *Conjuntos de Informação*, que são partições do conjunto dos nós de $T(G)$ que são, até o momento, indistinguíveis entre si.

Por exemplo, suponha que o jogo é representado pela árvore como vista em . O losango representa um movimento aleatório, os círculos representam movimentos do jogador 1 e os quadrados representam movimentos do jogador 2. Cada jogador pode optar entre 2 movimentos pessoais (representados pelos filhos esquerdo e direito de cada nó). Os números em cada folha representa o valor de K_2 para uma jogada que termine nela. O jogador 1 tem consciência do resultado da jogada inicial, já que cada um dos seus conjuntos informação (representados pelas linhas pontilhadas) é unitário. Mas o jogador 2 não conhece o resultado da jogada do jogador 1, então não pode escolher com certeza a melhor jogada, uma vez que dentro de cada um de seus conjuntos informação existem diferentes resultados para o mesmo movimento.

2.1.2 Jogos na forma Normal

Muitos jogos modelados com a forma Extensiva terão árvores muito grandes. Para facilitar a análise matemática de um jogo, é comum trabalhar com uma forma equivalente (como demonstrado em [NM44]) à Extensiva chamada *Forma Normal*.

Na forma normal, cada jogador possui uma lista de escolhas que ele fará em cada uma das situações possíveis de um jogos. Essa lista é chamada de *estratégia*. A partir da forma extensiva de um jogo, uma maneira de obter todas as estratégias de um jogador é associar a cada um dos ramos r que partem de um determinado nó n da árvore $T(G)$ número de $1, \cdots, r$. Uma estratégia para um jogador com q conjuntos informação é uma q-upla em que cada elemento corresponde ao movimento escolhido a partir de um dos conjuntos informação.

Para um jogo de 2 jogadores, podemos definir:

- dois *espaços de estratégia* X_1 e X_2, que são os conjuntos de todas as estratégias possíveis para o jogador 1 e o jogador 2, respectivamente.
- duas *funções de ganho* $K_1(x_1, x_2)$ e $K_2(x_1, x_2)$ que representam o ganho que cada jogador obtém quando o jogador 1 escolhe a estratégia x_1 e o jogador 2 escolhe a estratégia x_2.

Em jogos não-cooperativos (sem comunicação prévia entre os jogadores sobre as estratégias) existe o conceito de *Ponto de Equilíbrio*. Um par de estratégias $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ é um Ponto de Equilíbrio de um jogo se

$$\begin{array}{l} K_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \geq K_1(x_1, \widehat{x}_2), \forall x_1 \in X_1 \\ K_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \geq K_2(\widehat{x}_1, x_2), \forall x_2 \in X_2 \end{array} \tag{2.1}$$

Um tipo especial de jogo são os *Jogos de Soma Zero*, que são os jogos tais que

$$K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2) = 0, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2 \tag{2.2}$$

Se tomarmos, por exemplo, a função K_1, podemos reescrever 2.1 como

$$K_1(x_1, \widehat{x}_2) \leq K_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \leq K_1(\widehat{x}_1, x_2), \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \tag{2.3}$$

2.1.3 Jogo Minorante e Majorante

Seja Γ um jogo não cooperativo de soma zero para 2 jogadores em que ambos os jogadores definem suas estratégias sem conhecerem a estratégia do oponente. Sejam X_1 e X_2 os conjuntos de estratégias possíveis para os jogadores 1 e 2, respectivamente. Encontrar a estratégia ótima e seu respectivo valor da função utilidade é, em geral, uma tarefa difícil para Γ. Entretanto, podemos considerar 2 variações dele em que é mais fácil de se encontrar a estratégia ótima. Uma delas, Γ_1, é chamada de *variação minorante* de Γ e é idêntica ao jogo original, exceto pelo fato de que o jogador 1 escolhe sua estratégia $x_1 \in X_1$ antes do jogador 2 escolher $x_2 \in X_2$. Assim, em Γ_1, o jogador 1 está em devantagem em relação à sua situação em Γ. Outra variante Γ_2, chamada de *variação majorante* de Γ, representa a versão dual de Γ_1, ou seja, a variação em que o jogador 1 escolha x_1 depois do jogador 2 escolher x_2.

Considere a variante Γ_1. Se o jogador 1 escolher uma estratégia $\widehat{x}_1$, o jogador 2 escolherá x_2 de modo que o valor de $K_1(\widehat{x}_1, x_2)$ seja mínimo. Assim, o jogador 1 sabe que seu ganho ao final do jogo é $\min_{x_2 \in X_2} K_1(\widehat{x}_1, x_2)$. Por exemplo, no jogo representado pela tabela 2.1, se o jogador 1 escolher a estratégia a_2, o jogador 2 escolherá, com certeza, a jogada b_2, pois $0 = K_1(a_2, b_2) < K_1(a_2, b_1) = 1$ e $0 = K_1(a_2, b_2) < K_1(a_2, b_3) = 1$. Assim, o jogador 1 escolhe a estratégia que maximize o menor valor possível para seu ganho. Como $\min_{b_i} K_1(a_1, b_i) = 2$, $\min_{b_i} K_1(a_2, b_i) = 0$ e $\min_{b_i} K_1(a_3, b_i) = 0$, a estratégia ótima para o jogador 1 é a_1.

		Jogador 1		
		a_1	a_2	a_3
	b_1	4	1	1
Jogador 2	b_2	2	0	1
	b_3	3	1	0

Tabela 2.1: Exemplo de Jogo de 2 jogadores. As colunas representam as jogadas possíveis para o jogador 1 e as linhas representam as jogadas para o jogador 2. Em cada posição da tabela está o valor de $K_1(a_i, b_j)$

Portanto, o ganho do jogador 1 para Γ_1 depende, apenas, de x_1 e como o jogador 1 tenta maximizar seu ganho, temos que

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) \tag{2.4}$$

é o ganho ótimo do jogador 1 na variação minorante do jogo Γ.

De maneira análoga podemos analisar o ganho do jogador 1 no jogo Γ_2. Nesse caso, o jogador 2 escolhe antes do jogador 1 e, portanto, seguindo o raciocínio anterior, o jogador 1 deverá escolher a estratégia que maximize seu ganho. O jogador 2, por sua vez, deverá minimizar esse ganho escolhendo a jogada cujo valor máximo é o menor possível de K_1. No exemplo 2.1, o jogador 2 sabe que $\max_{a_i} K_1(a_i, b_1) = 4$, $\max_{a_i} K_1(a_i, b_2) = 2$ e $\max_{a_i} K_1(a_i, b_3) = 3$. Portanto, o jogador 2 escolherá a estratégia b_2.

O ganho ótimo do jogador 1 na variação majorante do jogo Γ é

$$v_2 = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2) \tag{2.5}$$

Intuitivamente, o ganho esperado para o jogador 1 na versão minorante do jogo deve ser menor que o ganho esperado na versão majorante, uma vez que em Γ_1 o jogador 1 está em desvantagem por escolher primeiro sua estratégia. Assim, esperamos que

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) \leq \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2) = v_2 \tag{2.6}$$

De fato, seja $X_1^{K_1} \subseteq X_1$ o conjunto de todas as estratégias $\widehat{x}_1$ tais que o valor da função $\min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2)$ é máximo quando $x_1 = \widehat{x}_1$. Analogamente, definiremos $X_2^{K_1} \subseteq X_2$ como o conjunto das estratégias $\widehat{x}_2$ tais que o valor de $\max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2)$ é mínimo quando $x_2 = \widehat{x}_2$. Tome $\widehat{x}_1 \in X_1^{K_1}$ e $\widehat{x}_2 \in X_2^{K_1}$. Então

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) \\ &= \min_{x_2 \in X_2} K_1(\widehat{x}_1, x_2) \\ &\leq K_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \\ &\leq \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, \widehat{x}_2) \\ &= \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2) = v_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.4 Teorema Minimax

A afirmação 2.6 é válida para jogos em geral. Entretanto, em jogos de soma zero, os valores de v_1 e v_2 coincidem, isto é

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2) = v_2 \tag{2.8}$$

Para provar 2.8, utilizaremos o Teorema Minimax de Von Neumann, mas com uma formulação diferente da exibida em [NM44]. Nela utlizaremos o conceito de *estratégias mistas*, definido abaixo.

Definição 1. *Seja A um conjunto de estratégias de um jogo na forma normal. Seja $\Delta(A)$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre A, isto é*

$$\Delta(A) = \left\{ p : A \to [0,1] \mid \sum_{a \in A} p(a) = 1 \right\}$$

Os elementos de $\Delta(A_i)$ são chamados de estratégias mistas *para o jogador i.*

Até agora, estivemos trabalhando com *estrategias puras*, isto é, estratégias escolhidas sem uma distribuição de probabilidade. Uma estratégia pura pode ser obtido a partir de $\Delta(A)$ usando a distribuição de probabilidade que associa probabilidade 1 a estratégia a ser escolhida e 0 a todas as outras.

Teorema 1. *Para qualquer jogo de soma zero para dois jogadores, existe uma estratégia mista para cada jogador tal que o resultado esperado para os dois é o mesmo valor V quando ambos jogadores usam esta estratégia. V é o melhor valor que cada um pode esperar de uma jogada, isto é, estas estratégias mistas são as estratégias ótimas para os dois jogadores.*

Demonstração. Sejam X_1 e X_2 os espaços de estratégias finitos dos jogadores 1 e 2, respectivamente, em um jogo G com soma zero. Seja $|X_1| = n$ e $|X_2| = m$. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de ganhos do jogo tal que a_{ij} é o ganho obtido pelo jogador 1 quando o jogador 1 escolhe a estratégia x_1^i e o jogador 2 escolhe a estratégia x_2^j. Podemos formular o ganho u_i dos jogadores

$$\begin{array}{l} u_1 = \max_{x_2 \in \Delta X_2} \min_{x_1 \in \Delta X_1} x_2 A x_1 \\ u_2 = \min_{x_1 \in \Delta X_1} \max_{x_2 \in \Delta X_2} x_2 A x_1 \end{array} \tag{2.9}$$

Se fixarmos $x_2 = \widehat{x}_2$, então $x_2 A = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ e, portanto, z_i é o valor esperado se o jogador 1 escolhe a i-ésima estratégia de seu espaço com probabilidade 1 (com probabilidade 0 em todas as outras estratégias). Note que $\min_{x_1} z x_1 = \min_i z_i$, ou seja, para minimizar o valor de $x_2 A x_1$ equivale a encontrar a menor componente de $x_2 A$. Ou seja

$$\max_{x_2 \in \Delta X_2} \min_{x_1 \in \Delta X_1} x_2 A x_1 = \max_{x_2 \in \Delta X_2} \min_i (x_2 A)_i \tag{2.10}$$

Assim, podemos formular o problema como um problema de programação linear

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & \min_i (x_2 A)_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{m} x_2^j = 1 \\ & x_2^j \geq 0, \forall j = 1, \cdots, m \end{array} \tag{2.11}$$

De maneira análoga, o ganho do jogador 2 pode ser calculado com

$$\min_{x_1 \in \Delta X_1} \max_{x_2 \in \Delta X_2} x_2 A x_1 = \min_{x_1 \in \Delta X_1} \max_j (A x_1)_j \tag{2.12}$$

com a respectiva formulação como programa linear

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \max_i (A x_1)_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{n} x_1^i = 1 \\ & x_1^i \geq 0, \forall i = 1, \cdots, n \end{array} \tag{2.13}$$

Se mostrarmos que 2.11 e 2.13 são um par de programas lineares primal-dual então saberemos que o valor das funções objetivo são o mesmo, de acordo com o Teorema da Dualidade [Chv83].

Podemos reescrever o PL 2.11 sem alterar seu valor ótimo

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & t \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} x_2^i a_{ij} \geq t \\ & \sum_{i=1}^{m} x_2^i = 1 \\ & x_2^i \geq 0, \forall i = 1, \cdots, m \end{array} \tag{2.14}$$

Encontramos o dual do PL 2.14 multiplicando cada restrição de desigualdade por x_1^j e cada restrição de igualdade por w e obtemos

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & w \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_1^j \geq w \\ & \sum_{j=1}^{n} x_1^j = 1 \\ & x_1^j \geq 0, \forall i = 1, \cdots, n \end{array} \tag{2.15}$$

Se observarmos que o PL 2.15 é uma versão equivalente do PL 2.13, concluímos que o PL 2.11 e o 2.13 são um par primal-dual e, portanto, têm mesmo valor ótimo. □

2.1.5 Premilinaridade

Considere a forma extensiva de um jogo. Se representarmos uma jogada particular do jogo como uma sequência $M_1, M_2, M_3, \cdots$ de movimentos, definimos um movimento *anterior* a um dado movimento M_k como qualquer movimento i tal que $i < q$. Um jogador pode ou não conhecer o caminho que o levou até um dado movimento M_k. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de M_i, com $i \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ tais que se $M_i \in \mathcal{P}$, então o jogador sabe qual filho do nó M_i foi escolhido como próximo movimento. O conjunto $\mathcal{P}$ é chamado de *Movimentos Preliminares* de M_k.

Os jogos em que os conjuntos de movimentos anteriores e preliminares coincidem para todas as jogadas são chamados de *Jogos com Informação Perfeita.* Pelo teorema do Minimax, em jogos com informação perfeita podemos encontrar uma estratégia ótima para Jogos com Informação Perfeita. Em jogos em que anterioridade não implica preliminaridade, chamados *Jogos com informação Incompleta*, podem ocorrer fenômenos interessantes. Por exemplo, preliminaridade pode não ser transitiva, isto é, podemos ter 3 movimentos M_i, M_j e M_k, tais que M_i é preliminar para M_j, M_j é preliminar para M_k mas M_i não é preliminar para M_k.

2.2 Bridge

2.2.1 Bridge como um jogo com informação incompleta

Bridge é um jogo de baralho que se utiliza de 52 cartas, divididas em 4 naipes ($\clubsuit$ paus, $\diamondsuit$ ouros, $\heartsuit$ copas e $\spadesuit$ espadas) com 13 cartas (Às, Rei, Dama, Valete, 10, 9, 8 7, 6, 5, 4, 3 e 2). Durante esse artigo, abreviaremos as cartas Às, Rei, Dama, Valete e 10 como A, K, Q, J e T, respectivamente. O jogo começa com um movimento aleatório: embaralhamento e distribuição de 13 cartas para cada um dos 4 jogadores, nomeados aqui como Norte (N), Sul (S), Leste (E) e Oeste (W) e posicionados na mesa de acordo com suas denominações. O jogo acontece em duplas, com a dupla N/S jogando contra a dupla E/W. O carteado começa com um dos jogadores escolhendo uma carta para jogar. A partir dele e no sentido horário, cada um dos outros jogadores devem jogar uma de suas cartas. Um conjunto de 4 cartas, uma vinda de cada jogador, é chamado de *vasa* e o jogador que venceu uma vasa abre a próxima vasa, até que tenham sido jogadas as 13 vasas. As regras do jogo mais significativas para esse artigo são:

- O primeiro jogador tem escolha livre sobre qualquer uma de suas 13 cartas para iniciar o jogo
- Os jogadores subsequentes *devem* jogar uma carta de mesmo naipe da primeira carta jogada na vasa. Caso não hajam cartas daquele naipe em suas mãos, a escolha da carta a ser jogada é livre
- O vencedor da vasa é o jogador que jogou a carta de maior valor do naipe inicial. A hierarquia das cartas é A $>$ K $>$ Q $>$ J $>$ T $>$ 9 $> \cdots >$ 3 $>$ 2. A exceção a essa regra acontece quando foi escolhido, antes do jogo, um naipe *trunfo*. Nesse caso, a maior carta do naipe de trunfo vence a vasa.

Além disso, o jogo de bridge envolve um jogador *carteador*, que controla suas cartas e as cartas do parceiro, denominado *morto*. As cartas do morto ficam na mesa, abertas para que todos os jogadores possam ver e o jogador morto não joga, apenas seu parceiro. Nesse trabalho consideraremos sempre o jogador Sul como Carteador e o jogador Norte como Morto. Assim, o jogador que abre o jogo é o Oeste e apenas quando ele joga a primeira carta o morto revela suas cartas.

2.2.2 Dificuldades do jogo de Bridge

Uma das grandes dificuldades de se analisar o jogo de Bridge é, justamente, o tamanho que o jogo adquire. Por exemplo, o primeiro movimento aleatório do Bridge gera $\frac{52!}{13!^4}$ filhos. Por conta disso, utilizaremos uma versão diminuída do jogo de Bridge para nosso estudo. Chamaremos esse jogo simplificado de *Kishid*. O Kishid é jogado da mesma maneira que o Bridge, mas o baralho tem apenas 8 cartas, com 2 naipes (♡ copas e ♠ espadas) e 4 cartas para cada um (A, K, 3 e 2). Além disso, não consideraremos no Kishid a existência de naipes trunfo.

Formulado como um jogo, o Bridge levanta diversas dificuldades para sua análise. A primeira é que não se trata de um jogo com informação perfeita. Assim, Preliminaridade não é uma propriedade transitiva, o que dificulta a análise da estratégia do adversário. Por exemplo no jogo representado em 2.2.2, quando o jogador W começa o jogo, por exemplo, jogando a carta ♡A, apenas ele sabe qual a escolha foi feita. Para os outros jogdores, a preliminaridade do primeiro movimento está oculta. No momento em que o morto mostra sua mão e joga uma carta (por exemplo, ♡2), fica claro para todos os jogadores qual a escolha foi feita pelo morto (foi escolhida uma entre 2 cartas possíveis). Quando o jogador L joga sua carta (por exemplo, o ♠2, o jogador S tem certeza da posição do jogo na árvore, pois ele consegue inferir qual a configuração das cartas. Assim, todos os movimentos anteriores ao seu passam a ser preliminares. Já para o jogador L, ainda não é possível descobrir qual a configuração das cartas. Assim, um movimento que é preliminar para um jogador não é, necessariamente preliminar para outro.

	♡ K2 ♠ - N	
A3 ♡ - ♠ W		E ♡ - ♠ K2
	S ♡ - ♠ A3	

Tabela 2.2: Exemplo de jogo

2.2.3 Exemplo de análise *ad-hoc*

Tome, como exemplo, o jogo de Kishid apresentado em 2.2.3. Nele, jogador W tem de começar o jogo, sem ter informação nenhuma sobre a mão dos adversários. Para decidir qual a melhor jogada, ele faz uma análise das combinações possíveis entre as cartas restantes. Nesse caso, apenas interessam as cartas de ♡*copas*. Como o total de cartas no jogo é 4, o jogador W sabe que existem apenas 2 cartas de ♡*copas* em jogo além das suas. Com as duas cartas que W possui, uma das vasas já está garantida: o ♡A é a maior carta de ♡ que está em jogo. O objetivo de W é conseguir fazer as 2 vasas do jogo.

		♡ xx		
		♠ xx		
		N		
A3 ♡	W		E	♡ xx
- ♠				♠ xx
		S		
		♡ xx		
		♠ xx		

Tabela 2.3: Exemplo em que o Jogador W abre o jogo, sem saber nenhuma informação sobre a mão dos outros 3 jogadores

Uma estratégia possível é começar o jogo com a carta ♡A, garantir a primeira vasa e tentar fazer com que a carta ♡K seja jogada nessa primeira vasa. Se isso acontecer, W garante que sua outra carta, o ♡3, vença a segunda vasa. Ou seja, se o ♡K e o ♡2 não estiverem nas mãos do mesmo jogador, o jogador W vence as 2 vasas. Além disso, existe um outro cenário favorável ao jogador W: se o jogado E estiver com ambas as cartas de ♡ restantes. Como Kishid (assim como o Bridge) é um jogo em duplas, se apenas a dupla E/W estiver com as cartas de ♡, a dupla ganha as duas vasas, independente das cartas dos adversários.

Existem um total de $\binom{2}{6} = 15$ combinações de distribuição das cartas restantes em jogo (excluindo-se as cartas do jogador W). Como são 3 jogadores, existe um total de $3! \times 15 = 90$ configurações de jogo possíveis. Sabemos que existem 2 possibilidades de distribuição para as cartas do naipe ♡: um jogador está com as 2 cartas de ♡ ou dois jogadores estão, cada um com uma carta de ♡. Entre as 90 possibilidades, são 36 as configurações em que um jogador possui as duas cartas de ♡. Como já vimos, nas outras 54 possibilidades, a dupla E/W vence as 2 vasas. Além disse, entre as 36 configurações dem que um jogador possui 2 cartas, 12 delas correspondem àquelas em que o jogador E está com ambas as cartas, o que caracteriza também uma vitória da dupla E/W. Assim, entre as 90 configurações possíveis, existem $54 + 12 = 66$ em que a estratégia escolhida faz a dupla E/W ganhar o jogo. Assim, a estratégia é considerada uma boa estratégia, pois em 73.33% dos jogos, a vitória será da dupla E/W.

2.3 Modelo de Melhor Defesa

Apesar da complexidade do jogo de Bridge (o jogo tem cerca de 1.05×10^{18} sequências possíveis de jogadas), os especialistas do jogo conseguem analisar situações de jogo e recomendar estratégias "ótima". Em geral, essas análises são feitas de maneira semelhante à que fizemos: enumera-se todas as possíveis distribuições das cartas restantes e estuda-se cada caso. Para entender como essa análise funciona, estudaremos o modelo de *Melhor Defesa*, que simula o raciocínio feito para chegar em tais estratégias.

Para essa modelagem, consideraremos que o Bridge é um jogo de 2 jogadores, uma vez que é jogado em duplas. Além disso, iremos nos concentrar em analisar a função utilidade K_1 e o jogador que tenta maximizar esse ganho será chamado de MAX. O outro jogador será chamado de MIN.

O *Modelo de Melhor Defesa* criado por Frank em [FB98] é o resultado da tranformação de um jogo em outro equivalente com as seguintes propriedades:

(I) MIN tem informação perfeita

(II) MIN escolhe sua estratégia depois de MAX

(III) a estratégia adotada por MAX é pura

Em termos do jogo de Bridge, podemos considerar que a dupla E/W é a dupla MAX e a dupla N/S é a dupla MIN. Isso porque a dupla N/S tem metade de suas cartas expostas na mesa e, portanto, deve se defender dos ataques da dupla adversária. Uma vez que o carteador da dupla N/S conhece todas as suas cartas (as do carteador e as do morto), podemos considerar que MIN tem informação perfeita, uma vez que ele sempre sabe quais escolhas o jogador MAX tem e qual foi feita. Além disso, como o jogador MAX (ou seja, a dupla E/W) abre o jogo, o jogador MIN escolhe sua estratégia depois de MAX. Além disso, a estratégia de MAX é pura, pois ele de fato escolhe uma entre suas jogadas possíveis, e não associa uma distribuição de probabilidade.

2.3.1 Resolvendo o Modelo de Melhor Defesa

A condição (II) do Modelo de Melhor Defesa sugere que um jogo nessa forma se assemelhe à variação minorante de um jogo com informação perfeita vista em 2.1.3. O valor esperado para o jogador MAX é

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) \tag{2.16}$$

Note que nesse modelo, o jogador MIN tem informação perfeita e o MAX não. Assim, MIN sempre sabe sua exata posição na árvore do jogo e pode escolher um x_2 ótimo para cada escolha x_1 de MAX. Como MAX não tem informação perfeita, podem existir movimentos no jogo cujo resultado é claro para MIN mas é desconhecido para MAX. Assim, MAX não sabe se um determinado movimento x_2 é ótimo para MIN.

O algoritmo exibido por [FB98] tenta solucionar esse problema da seguinte maneira: todas as estratégias x_1 possíveis para MAX são enumeradas e, para cada uma delas, $\min_{x_2} K_1(x_1, x_2)$ é calculado para cada possível escolha de x_2. O algoritmo é chamado de *Minimização Exaustiva de Estratégias*

Capítulo 3

Parte Subjetiva

3.1 Desafios e Frustrações

Meu objetivo inicial com esse trabalho era modelar o jogo de King em duplas. Por ser um jogo com muitas características especiais, com regras diferentes para cada mão, a priore restringi meus estudos à uma parte do jogo de King que se assemelha à mecânica do jogo de Bridge, alvo de diversos estudos na área de Inteligência Artificial. Assim, pensei em comparar diversos algoritmos para jogar Bridge, a fim de descobrir o mais adequado para o jogo de King.

Entretanto, fui atrapalhado por diversos fatores. O jogo de Bridge é extremamente complexo, e entender sua mecânica era parte fundamental para entender os algoritmos, uma vez que, sem uma abordagem *ad-hoc* ou heurística, o problema de "resolver" um jogo é muito complexo. Assim, gastei algum tempo entendendo o funcionamento do jogo. Além disso, o artigo que descreve o algortimo de [FB98] é bastante intrincado e demanda muito conhecimento de Teoria dos Jogos. Como a abordagem dele é a mais próxima do que prefiro estudar, decidi dedicar meu trabalho ao artigo de Ian Frank, abrindo mão da comparação com outros algoritmos.

Finalmente, não consegui implementar satisfatoriamente o algoritmo de Frank, pois o estudo para entendê-lo tomou muito tempo. Isso se reflete também na falta de resultados mais claros e incisivos sobre a validade do algoritmo.

O trabalho de formatura foi uma boa maneira de estudar algo diferente e me fez descobrir que quero continuar estudando Matemática e Teoria dos Jogos, pois gostei muito de trabalhar com essas áreas.

Uma passagem que vale a pena citar é a demonstração do Teorema Minimax de Von Neumann. Apesar do trabalho original [NM44] apresentar uma demonstração do teorema, preferi fazer outra demonstração utilizando programação linear, por ser mais ligada ao que aprendi no curso do BCC.

3.2 Disciplinas Relevantes para o Desenvolvimento do Trabalho

- **MAE0121 - Introdução a Probabilidade e a Estatística I**
  MAE0212 - Introdução a Probabilidade e a Estatística II

MAE0228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos
As disciplinas de Estatística foram muito importantes para compreender algumas definições utilizados durante o decorrer dos estudos.

- **MAE 515 - Introdução à Teoria dos Jogos**
  Disciplina funcamental para o estudo. Despertou meu interesse pela área de Teoria dos Jogos e proporcionou contato com a literatura da área, o que foi muito útil quando precisei procurar definições mais amigáveis do que as do livro de [NM44] que, por ser um livro mais antigo, tem uma linguagem por vezes complicada

- **MAC 315 - Programação Linear**
  MAC 427 - Programação Não Linear
  MAC 325 - Otimização Combinatória
  As disciplinas de otimização foram fundamentais para o progresso no trabalho, pois o problema proposto trata-se de uma série de problemas de otimização. Ter contato com essas discplinas ajudaram a entender os problemas mais facilmente.

3.3 Agradecimentos

A meu pais pelo suporte e amor incondicional

À mulher da minha vida, Yumi, por todo apoio, risadas, cafés e confiança.

A meu supervisor, professor Flávio Soares Correa da Silva pelo suporte.

Aos amigos, por todo o tempo "perdido" com divagações aleatórias, conversas sem sentido e contemplações do universo enquanto entidade cósmica.

Aos professores do IME que me ensinaram que o aprendizado não é um objetivo, mas uma jornada: Sônia Garcia, Manuel Garcia, Sérgio Oliva, Eduardo Colli, Fábio Tal, Roseli Fernandez, Paulo Silva e Silva, Cláudia Peixoto, Marco Gubitoso e Orlando Lopes.

E a Terry Pratchett, autor de "A Luz Fantástica", que me fez entender o tamanho da encrenca

> *"VOCÊ FALOU QUE OS HUMANOS JOGAM ISSO POR PRAZER?"*
> *"Sim, e alguns são muito bons. Eu não passo de um amador."*
> *"MAS ELES SÓ VIVEM ATÉ OS 80, 90 ANOS!"*

(Terry Pratchett, "A Luz Fantástica")

Referências Bibliográficas

[Chv83] V. Chvatal. *Linear Programming.* Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman, 1983.

[FB98] Ian Frank e David Basin. Search in games with incomplete information: a case study using bridge card play. *Artificial Intelligence*, 100(1-2):87–123, 1998.

[NM44] John Von Neumann e Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944.