Modelo de Melhor Defesa em Jogos com Informação Incompleta

Fábio Takashi Hirano
Supervisor: Prof. Flávio S. C. Silva

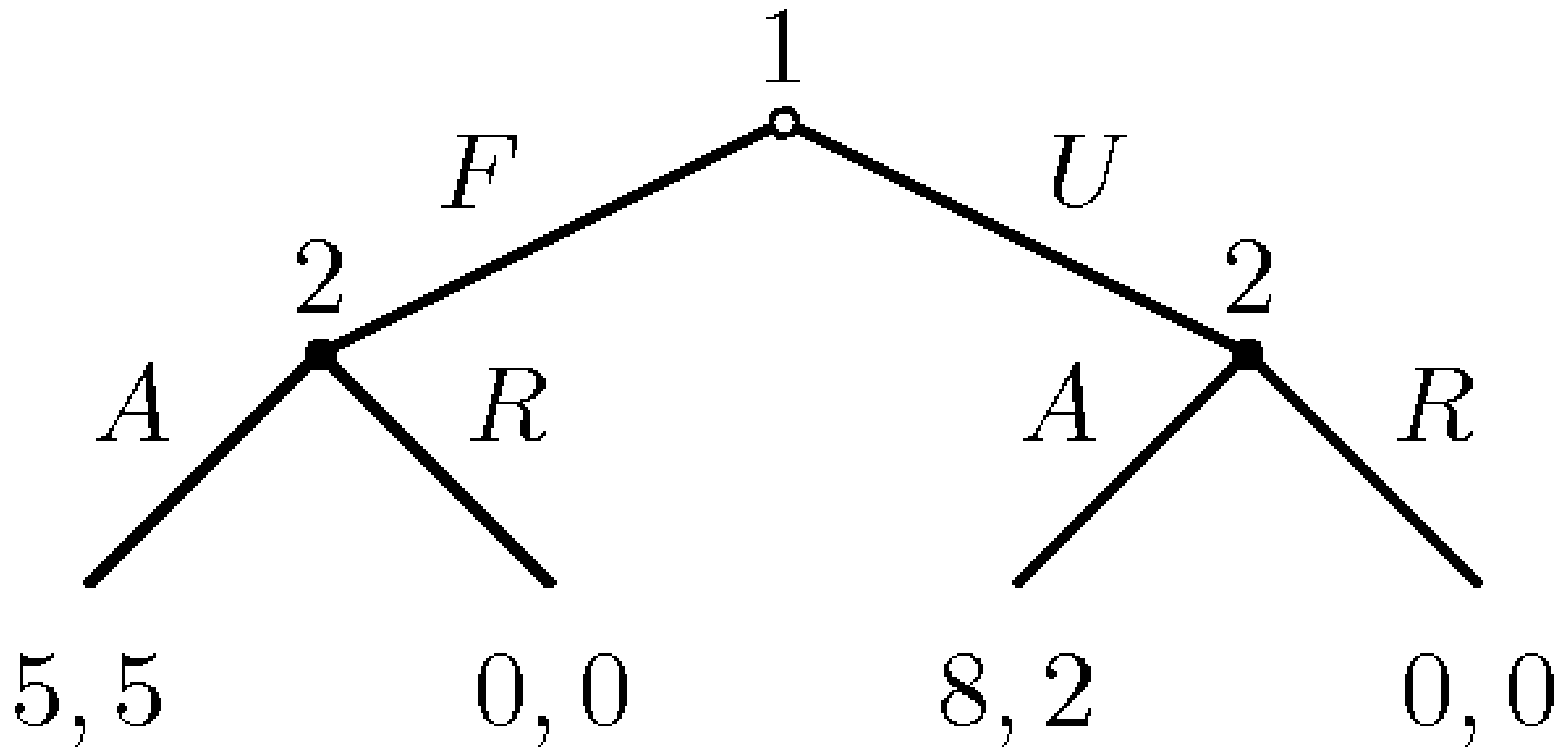
Jogos com Informação Incompleta

- Teoria dos Jogos:
  - Estuda situações estratégicas onde jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno
- Informação Incompleta
  - Jogadores não possuem pleno conhecimento das estratégias do adversário
    - Exemplos: Pôquer, Dominó, Eleições
  - Encontrar uma estratégia ótima é NP-Difícil!
  - Solução: Abordagem Heurística

Modelos de Jogos

- Jogos na Forma Extensiva
  - Modelo para Jogos em que a ordem dos movimentos é importante
  - Representado por uma árvore finita, em que cada nó é um movimento
  - Conjuntos Informação : nós dentre os quais um jogador não consegue distinguir
  - Árvore potencialmente MUITO GRANDE!

Exemplo



Modelos de Jogos

- Jogos na Forma Normal
  - Forma equivalente à Extensiva
  - Conhecemos as estratégias de cada jogador
  - Ki(x) representa o ganho do jogador i quando os movimentos são (x1, x2, x3….)

Exemplo

	F	U
A	(5,5)	(8,2)
R	(0,0)	(0,0)

Jogos para 2 Jogadores

Pontos de Equilíbrio de um jogo na forma normal são os pares de estratégia $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ tais que

$$K_1(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \geq K_1(x_1, \widehat{x_2}), \forall x_1 \in X_1$$
$$K_2(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \geq K_2(\widehat{x_1}, x_2), \forall x_2 \in X_2$$

Um *Jogo de Soma Zero* é um jogo tal que

$$K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2) = 0, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$$

Teorema Min-Max

Tome o jogo Γ_1. Para cada jogada $\hat{x_1} \in X_1$, o jogador 2 escolherá x_2 tal que minimize a função $K_1(\hat{x_1}, x_2)$, ou seja, que minimize o ganho do jogador 1. Dessa maneira, o jogador 1 já sabe qual será a jogada escolhida pelo jogador 2 e, portanto, o ganho do jogador 1 em Γ_1 será

$$v_1 = \max_{x_1} \min_{x_2} K_1(x_1, x_2)$$

Analogamente, se estivermos trabalhando com a versão majorante de Γ, teremos um ganho, para o jogador 1, de

$$v_2 = \min_{x_2} \max_{x_1} K_1(x_1, x_2)$$

Teorema Min-Max

Em [NM44] é mostrado que o valor v, que é o ganho esperado para o jogador 1 no jogo Γ tem como limitantes os valores de v_1 e v_2. Essa afirmação, que vale para jogos em geral, é refinada no caso de jogos de soma zero.

Teorema 1 *Dado um jogo de soma zero Γ com 2 jogadores, temos que*

$$\max_{x_1} \min_{x_2} K_1(x_1, x_2) = \min_{x_2} \max_{x_1} K_1(x_1, x_2)$$

onde $K_1(x_1, x_2)$ é a função utilidade para o jogador 1.

Bridge

Em termos de Teoria dos Jogos, podemos entender o Bridge como um jogo de soma zero para 2 jogadores, pois podemos considerar cada uma das duplas como um jogador apenas. Escolheremos trabalhar com $K_1(x_1, x_2)$ e, portanto, o jogador 1 será considerado MAX, pois está tentando maximizar o valor da função utilidade. Já o jogador 2 será chamado de MIN. Como os jogadores jogam alternadamente, podemos entender o jogo em árvores de decisão de 3 níveis MAX-MIN-MAX. O jogador MAX fará seu movimento tentando prever o que MIN fará. Por sua vez, MIN escolherá o movimento baseado no que ele acredita que MAX fará. Portanto a decisão de MAX é baseada no que MAX acredita que MIN acredita que MAX fará (decisão em 3 níveis).

Modelo de Melhor Defesa

1. MIN conhece a jogada de MAX e pode prever a próxima jogada
2. MIN escolhe sua estratégia baseado na estratégia de MAX
3. A estratégia de MAX é pura, isto é, ele, de fato, escolhe um movimento (e não associa uma probabilidade a todos os movimentos)

Qualquer jogo transformado em um jogo que tenha as 3 características acima é um jogo na *Forma de Melhor Defesa*

Minimização Exaustiva de Estratégias

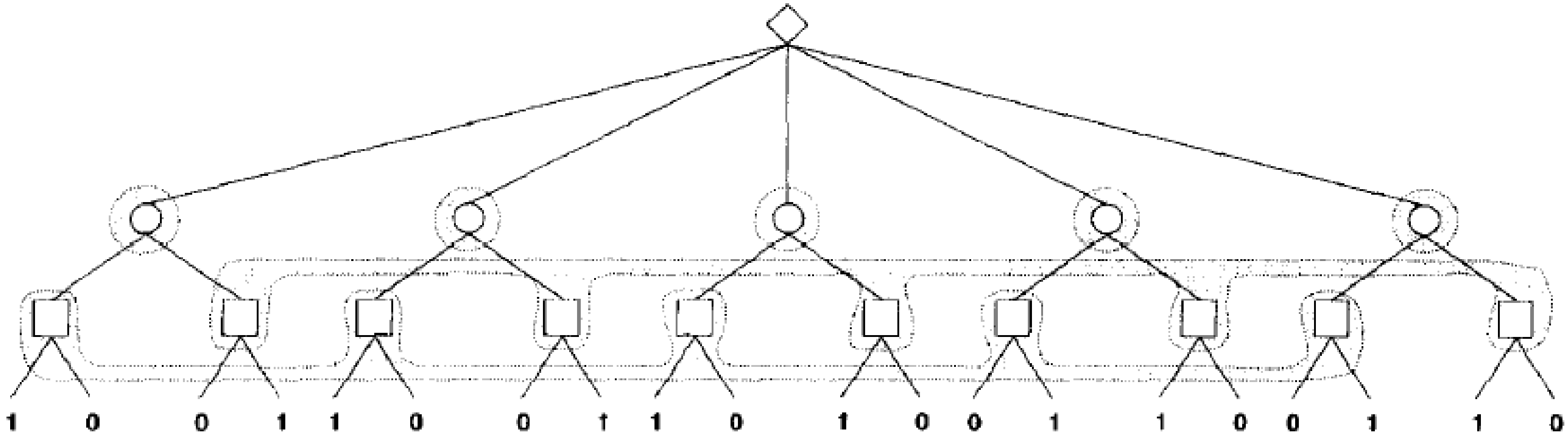
Algoritmo 1 • *Crie um conjunto S de estratégias do jogador 1, formado por q-uplas em que a i-ésima entrada representa o caminho escolhido em todos os nós n para quem $\mathcal{I}_1(n) = i$*

- *Para cada $s_j \in S$, calcule $E_j = esm(t, s_j)$*
- *Devolve as estratégias para quem s_j é máximo*

No algoritmo, $esm(t, S)$ é definido pela tabela abaixo:

Condição	Resultado
t é uma folha	$K_1(t)$
$\mathcal{P}(node(t)) = 2$	$\min_{t_i \in sub(t)} esm(t_i, s)$
$\mathcal{P}(node(t)) = 1$	$esm(t_i, s)$, onde i é o $\mathcal{I}_1(node(t))$-ésimo elemento de s
$\mathcal{P}(node(t)) = 0$	$\sum_{t_i \in sub(t)} \pi(node(t_i)) esm(t_i, s)$

Exemplo



- MAX = quadrados, MIN = círculos
- MAX tem 2 conjuntos informação

Exemplo

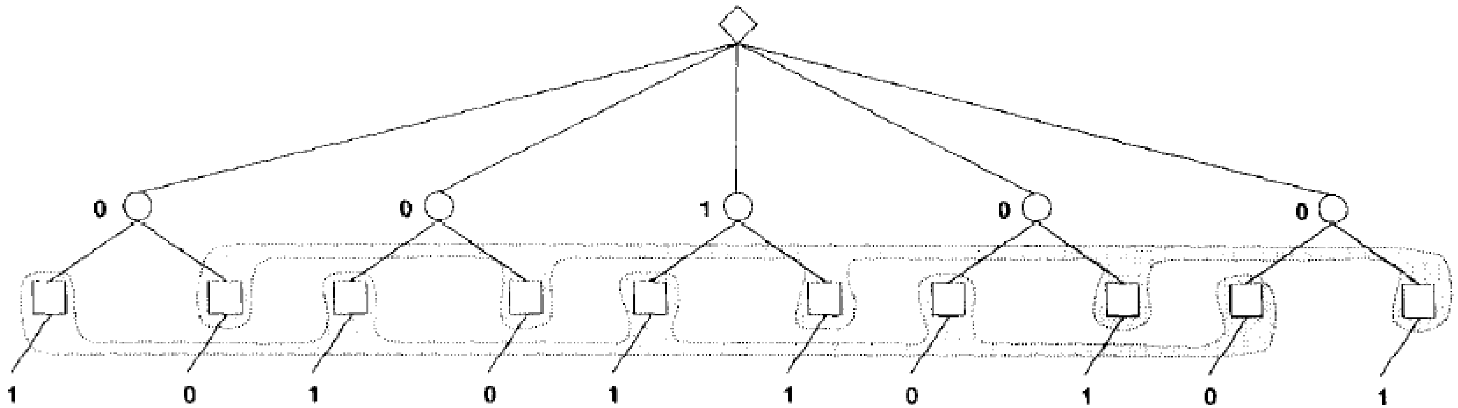


Fig. 5. MAX's expected payoffs when selecting strategy (1, 1).

Referências

[FB98] Ian Frank e David Basin. Search in games with incomplete information: a case study using bridge card play. *Artificial Intelligence*, 100(1-2):87 123, 1998.

[NM44] John Von Neumann e Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.