Provadores de Teoremas baseados em contagem

Eduardo Menezes de Morais
lenin@linux.ime.usp.br
Orientador: Marcelo Finger

Instituto de Matemática e Estatística - USP

17 de novembro de 2008

O que veremos hoje:

1. O Problema
   - O que foi feito nesse trabalho
2. Contando interpretações
   - Considerações sobre complexidade
   - Tabela-Verdade
   - Algoritmo de Iwama
   - Algoritmo de Dubois
   - Um novo algoritmo
     - Exemplo de uso do novo algoritmo
3. Implementações
   - Resultados
4. Conclusão

Relembrando: lógica proposicional

- Formada por váriaveis combinadas usando conectivos lógicos como conjunção(E, símbolo $\wedge$), disjunção(OU, símbolo $\vee$), negação(símbolo $\neg$) e implicação(símbolo $\rightarrow$).
- As variáveis podem receber valores Verdadeiro ou Falso.

Exemplo

Choveu e quando chove molha a grama. Portanto a grama esta molhada.
$(Chove \wedge (Chove \rightarrow MolhaAGrama)) \rightarrow MolhaAGrama$

Definição

Uma interpretação é uma atribuição de valores Verdadeiro ou Falso às variáveis de uma fórmula.

Corolário

Para uma fórmula com n variáveis, existem 2^n interpretações

- Interpretações que tornam a fórmula verdadeira, dizemos que satisfazem a fórmula
- Se **todas** as interpretações satisfazem uma fórmula, ela é uma tautologia
- Se **algumas** interpretações satisfazem uma fórmula, ela é satisfatível
- Se **nenhuma** interpretação satisfaz uma fórmula, ela é insatisfatível

Relembrando: lógica proposicional

Definição

Uma interpretação é uma atribuição de valores Verdadeiro ou Falso às variáveis de uma fórmula.

Corolário

Para uma fórmula com n variáveis, existem 2^n interpretações

- Interpretações que tornam a fórmula verdadeira, dizemos que satisfazem a fórmula
- Se **todas** as interpretações satisfazem uma fórmula, ela é uma tautologia
- Se **algumas** interpretações satisfazem uma fórmula, ela é satisfatível
- Se **nenhuma** interpretação satisfaz uma fórmula, ela é insatisfatível

Provadores de Teoremas

- Todas as fórmulas podem ser reduzidas a fórmulas 3DNF (fórmulas na Forma Normal Disjuntiva, disjunções de conjunções, com três literais por conjunção)
- O problema de saber se uma fórmula é uma tautologia (ou teorema) é um problema Co-NP-Completo.
- Programas que resolvem esse problema são chamados provadores de teoremas
- As abordagens tradicionais para esse problema incluem:
  - Variantes do algoritmo de Davis-Putnam-Logemann-Loveland (baseado em backtrack)
  - Algoritmos genéticos (baseado em métodos estocásticos de busca local)
- Esse problema é o complementar do famoso problema 3SAT (satisfatibilidade booleana) e todos os métodos de um podem ser usados no outro.

O que foi feito nesse trabalho

- Foram pesquisados e implementados algoritmos de prova de Teorema baseados em idéias diferentes. Mais especificamente, baseados na contagem de intepretações que satisfazem uma fórmula
- Os algoritmos foram adaptados, pois a maioria estava direcioanada a resolver o problema SAT-CNF
- Foi desenvolvido um novo algoritmo baseado em contagem.

O que foi feito nesse trabalho

- Foram pesquisados e implementados algoritmos de prova de Teorema baseados em idéias diferentes. Mais especificamente, baseados na contagem de intepretações que satisfazem uma fórmula
- Os algoritmos foram adaptados, pois a maioria estava direcioanada a resolver o problema SAT-CNF
- Foi desenvolvido um novo algoritmo baseado em contagem.

O que foi feito nesse trabalho

- Foram pesquisados e implementados algoritmos de prova de Teorema baseados em idéias diferentes. Mais especificamente, baseados na contagem de intepretações que satisfazem uma fórmula
- Os algoritmos foram adaptados, pois a maioria estava direcioanada a resolver o problema SAT-CNF
- Foi desenvolvido um novo algoritmo baseado em contagem.

A complexidade de contar

- Quando se conta quantas interpretações satisfazem uma certa fórmula, pode-se saber facilmente se uma fórmula é uma tautologia (ou se é satistatível, ou se é insatisfatível)
- É uma boa heurística
- O problema de contar quantas interpretações satisfazem uma fórmula, não é um problema de decisão, portanto não está nem em P nem em NP
- L.G. Valiant em 1977 chamou esse problema de #SAT e o classificou na classe de complexidade #P, sendo que ele é #P-Completo.
- Faz pouco sentido dizer que $NP \subset \#P$, pois eles contém problemas diferentes. Mas temos que se $\#P$ puder ser resolvido eficientemente (em tempo polinomial), NP também pode. Porém mesmo que $P = NP$, pode ser que $\#P$ não possa ser resolvido eficientemente. (É como se pudessemos dizer que "$NP \subset \#P$")

A complexidade de contar

- Quando se conta quantas interpretações satisfazem uma certa fórmula, pode-se saber facilmente se uma fórmula é uma tautologia (ou se é satistatível, ou se é insatisfatível)
- É uma boa heurística
- O problema de contar quantas interpretações satisfazem uma fórmula, não é um problema de decisão, portanto não está nem em P nem em NP
- L.G. Valiant em 1977 chamou esse problema de #SAT e o classificou na classe de complexidade #P, sendo que ele é #P-Completo.
- Faz pouco sentido dizer que $NP \subset \#P$, pois eles contém problemas diferentes. Mas temos que se $\#P$ puder ser resolvido eficientemente (em tempo polinomial), NP também pode. Porém mesmo que $P = NP$, pode ser que $\#P$ não possa ser resolvido eficientemente. (É como se pudessemos dizer que "$NP \subset \#P$")

A complexidade de contar

- Quando se conta quantas interpretações satisfazem uma certa fórmula, pode-se saber facilmente se uma fórmula é uma tautologia (ou se é satistatível, ou se é insatisfatível)
- É uma boa heurística
- O problema de contar quantas interpretações satisfazem uma fórmula, não é um problema de decisão, portanto não está nem em P nem em NP
- L.G. Valiant em 1977 chamou esse problema de #SAT e o classificou na classe de complexidade #P, sendo que ele é #P-Completo.
- Faz pouco sentido dizer que $NP \subset \#P$, pois eles contém problemas diferentes. Mas temos que se $\#P$ puder ser resolvido eficientemente (em tempo polinomial), NP também pode. Porém mesmo que $P = NP$, pode ser que $\#P$ não possa ser resolvido eficientemente. (É como se pudessemos dizer que "$NP \subset \#P$")

A complexidade de contar

- Quando se conta quantas interpretações satisfazem uma certa fórmula, pode-se saber facilmente se uma fórmula é uma tautologia (ou se é satistatível, ou se é insatisfatível)
- É uma boa heurística
- O problema de contar quantas interpretações satisfazem uma fórmula, não é um problema de decisão, portanto não está nem em P nem em NP
- L.G. Valiant em 1977 chamou esse problema de #SAT e o classificou na classe de complexidade #P, sendo que ele é #P-Completo.
- Faz pouco sentido dizer que $NP \subset \#P$, pois eles contém problemas diferentes. Mas temos que se $\#P$ puder ser resolvido eficientemente (em tempo polinomial), NP também pode. Porém mesmo que $P = NP$, pode ser que $\#P$ não possa ser resolvido eficientemente. (É como se pudessemos dizer que "$NP \subset \#P$")

A complexidade de contar

- Quando se conta quantas interpretações satisfazem uma certa fórmula, pode-se saber facilmente se uma fórmula é uma tautologia (ou se é satistatível, ou se é insatisfatível)
- É uma boa heurística
- O problema de contar quantas interpretações satisfazem uma fórmula, não é um problema de decisão, portanto não está nem em P nem em NP
- L.G. Valiant em 1977 chamou esse problema de #SAT e o classificou na classe de complexidade #P, sendo que ele é #P-Completo.
- Faz pouco sentido dizer que $NP \subset \#P$, pois eles contém problemas diferentes. Mas temos que se $\#P$ puder ser resolvido eficientemente (em tempo polinomial), NP também pode. Porém mesmo que $P = NP$, pode ser que $\#P$ não possa ser resolvido eficientemente. (É como se pudessemos dizer que "$NP \subset \#P$")

Contar enumerando: A Tabela-Verdade

- O jeito mais trivial de se contar o número de interpretações é olhar todas e ver quais satisfazem a fórmula. É a famosa tabela-verdade

Tabela: Exemplo de tabela-verdade

a	b	c	$(a \wedge \neg b) \vee \neg c$
F	F	F	V
F	F	V	F
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	F

O Algoritmo de Iwama

Esse algoritmo foi pensado por Kazuo Iwama em 1987. Outros algoritmos interessantes se originaram dele.
Iwama apontava em seu artigo que esse algorirmo é o "dual" dos algoritmos de backtrack.

Idéia

Se temos n variáveis e apenas i literais em uma conjunção, essa conjunção valida 2^{n-i} interpretações.
Ex.: $a \wedge b$ validam abc e $ab\bar{c}$

Problema

Algumas conjunções validam a mesma interpretação.
Ex.: Na fórmula $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, ambas as conjunções validam a interpretação abc

O Algoritmo de Iwama

Esse algoritmo foi pensado por Kazuo Iwama em 1987. Outros algoritmos interessantes se originaram dele.
Iwama apontava em seu artigo que esse algorirmo é o “dual” dos algoritmos de backtrack.

Idéia

Se temos n variáveis e apenas i literais em uma conjunção, essa conjunção valida 2^{n-i} interpretações.
Ex.: $a \wedge b$ validam abc e $ab\bar{c}$

Problema

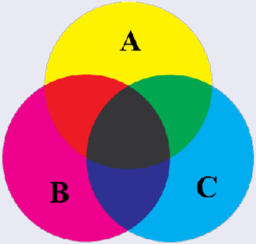
Algumas conjunções validam a mesma interpretação.
Ex.: Na fórmula $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, ambas as conjunções validam a interpretação abc

O Algoritmo de Iwama

Solução

Subtrair as interpretações que aparecem duas vezes, somar as que aparecem três vezes, . . . , como na teoria dos conjuntos

$$S = \sum_{\Omega \subset C} (-1)^{\|\Omega\|} 2^{(n - \phi(\Omega))}$$



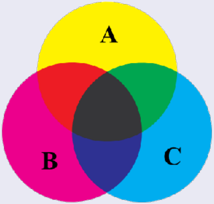
O Algoritmo de Dubois

Olivier Dubois procurou uma abordagem diferente: ao invés de ficar trabalhando para não contar duas vezes a mesma interpretação, fazer uma transformação na fórmula para cada conjução ser independente.

Solução

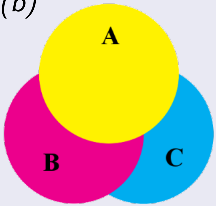
A solução de Dubois envolve transformar algo do tipo $A \vee B$ em $A \vee (B \wedge \neg A)$, transformando tudo de volta à DNF quando necessário.

(a)



(Interpretações originais)

(b)



(Após modificações)

Algoritmo de Dubois

Exemplo

$(a \wedge b \wedge c) \vee (d \wedge e)$ *se torna*

$(a \wedge b \wedge c) \vee (d \wedge e \wedge \neg a) \vee (d \wedge e \wedge a \wedge \neg b) \vee (d \wedge e \wedge a \wedge b \wedge \neg c)$

Para tornar independente de mais de uma conjunção, para cada conjunção criada se aplica o algoritmo de novo.

Isso pode levar a um crescimento exponencial da fórmula algumas vezes.

Mas muitas vezes, como os literais se repetem, algumas conjunções somem.

Modificando o algoritmo de Dubois

Esse é algoritmo inventado pelo autor, baseado (de início sem meu conhecimento) no algoritmo de Dubois:

Problema

Essa transformação para tornar uma fórmula independente pode criar um número exponencial de novas conjunções. Mas no final das contas só precisamos saber o tamanho e quantidade delas.

Solução

- *Começamos "fingindo" que todos os literais são diferentes (pior caso do algoritmo de Dubois)*
- *Usando análise combinatória, sabemos exatamente quantas interpretações todas aquelas conjunções validam sem ter que calcular cada uma!*
- *Então para cada literal repetido (conflito) tiramos ou adicionamos interpretações.*

Modificando o algoritmo de Dubois

Esse é algoritmo inventado pelo autor, baseado (de início sem meu conhecimento) no algoritmo de Dubois:

Problema

Essa transformação para tornar uma fórmula independente pode criar um número exponencial de novas conjunções. Mas no final das contas só precisamos saber o tamanho e quantidade delas.

Solução

- *Começamos "fingindo" que todos os literais são diferentes (pior caso do algoritmo de Dubois)*
- *Usando análise combinatória, sabemos exatamente quantas interpretações todas aquelas conjunções validam sem ter que calcular cada uma!*
- *Então para cada literal repetido (conflito) tiramos ou adicionamos interpretações.*

Modificando o algoritmo de Dubois

Esse é algoritmo inventado pelo autor, baseado (de início sem meu conhecimento) no algoritmo de Dubois:

Problema

Essa transformação para tornar uma fórmula independente pode criar um número exponencial de novas conjunções. Mas no final das contas só precisamos saber o tamanho e quantidade delas.

Solução

- *Começamos "fingindo" que todos os literais são diferentes (pior caso do algoritmo de Dubois)*
- *Usando análise combinatória, sabemos exatamente quantas interpretações todas aquelas conjunções validam sem ter que calcular cada uma!*
- *Então para cada literal repetido (conflito) tiramos ou adicionamos interpretações.*

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Seja A as conjunções originais e $\|A\|$ o número de interpretações satisfeitas por elas.
  Ao torná-las independente de uma conjunção $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, criamos novas conjunções $A \wedge \neg x_1$, $A \wedge x_1 \wedge \neg x_2$ e $A \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$.
- O número de interpretações então se torna $\frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{4} + \frac{\|A\|}{8}$, ou seja $\frac{7}{8}\|A\|$.
- O número de interpretações da i-ésima conjunção é $2^{(n-3)}(\frac{7}{8})^i$
- Não se esqueça que o número de variáveis aqui dito é um número "falso", considerando-se que nenhum literal se repete!

Nota

$\frac{7}{8}$ é o "número mágico" quando se tem exatamente 3 literais. No caso geral se multiplica por $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{2^n}$

Em maiores detalhes...

- Se dois literais contraditórios aparecem juntos, precisamos eliminar as conjunções onde eles aparecem.
- Se dois literais iguais aparecem juntos, precisamos duplicar o número de interpretações contribuidas por suas conjunções
- Em ambos os casos precisamos pegar um subconjunto das conjunções
- $$X\left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Em maiores detalhes...

- Se dois literais contraditórios aparecem juntos, precisamos eliminar as conjunções onde eles aparecem.
- Se dois literais iguais aparecem juntos, precisamos duplicar o número de interpretações contribuidas por suas conjunções
- Em ambos os casos precisamos pegar um subconjunto das conjunções
- $$x \left(\frac{8}{7}\right) \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Em maiores detalhes...

- Se dois literais contraditórios aparecem juntos, precisamos eliminar as conjunções onde eles aparecem.
- Se dois literais iguais aparecem juntos, precisamos duplicar o número de interpretações contribuidas por suas conjunções
- Em ambos os casos precisamos pegar um subconjunto das conjunções
- $$X\left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Conflitos conflitantes

- O maior problema é quando uma mesma conjunção se envolve em mais de um conflito. Nesse caso não se pode simplesmente "voltar a trás e fixar um caso" como feito anteriormente. Tem que se considerar o que já foi eliminado/somado anteriormente.
- Normalmente isso envolve fazer uma "bifurcação", considerando o outro conflito
- Essa bifurcação pode ser calculada multiplicando por algo do tipo $\left(1 \pm \left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
- Isso pode complicar bastante as coisas...

Conflitos conflitantes

- O maior problema é quando uma mesma conjunção se envolve em mais de um conflito. Nesse caso não se pode simplesmente "voltar a trás e fixar um caso" como feito anteriormente. Tem que se considerar o que já foi eliminado/somado anteriormente.
- Normalmente isso envolve fazer uma "bifurcação", considerando o outro conflito
- Essa bifurcação pode ser calculada multiplicando por algo do tipo $(1 \pm \binom{8}{7}\binom{1}{2})$
- Isso pode complicar bastante as coisas...

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \land \neg b \land c) \lor (\neg b \land d \land e) \lor (\neg d \land f)$ independentes de $\square$

- Número "falso" de variáveis : 8
- $2^8 \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = 7^2 \cdot 3 = 147$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \land \neg d)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = -28$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \land d \land \neg e)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = +14$
- Conflito: $(\neg d \land \neg f)$ c/ $(\neg b \land \neg d)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = +14$
- Conflito: $(\neg d \land \neg f)$ c/ $(\neg b \land d \land \neg e)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = -7$

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\square$

- Número "falso" de variáveis : 8
- $2^8 \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = 7^2 \cdot 3 = 147$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = -28$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = -7$

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\square$

- Número "falso" de variáveis : 8
- $2^8 \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = 7^2 \cdot 3 = 147$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = -28$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = -7$

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\Box$

- Número "falso" de variáveis : 8
- $2^8 \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = 7^2 \cdot 3 = 147$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = -28$
- Conflito: (d) c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge \neg d)$: $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = +14$
- Conflito: $(\neg d \wedge \neg f)$ c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$: $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = -7$

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\Box$

- Conflito: $(a \wedge b)$ c/ (b): $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2} = +24$
- Conflito: $(a \wedge b)$ c/ $(\neg b \wedge \neg d)$:
  $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}) = -8$
- Conflito: $(a \wedge b)$ c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$:
  $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot (1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}) = -8$
- Conflito: $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ c/ (b): $-7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2} = -12$
- Conflito: $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ c/ $(\neg b \wedge \neg d)$:
  $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}) = +4$
- Conflito: $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ c/ $(\neg b \wedge d \wedge \neg e)$:
  $+7^2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot (1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}) = +4$

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\square$

- Total=144
- Tinhamos fingido que o número de variáveis era 8, quando na verdade é 6.
  $Total = 144 \div 4 = 36$
- Como fizemos o algoritmo da independencia com $\square$, temos que a resposta é
  $$2^6 - 36 = 28$$
  que de fato é a resposta correta!

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\Box$

- Total=144
- Tinhamos fingido que o número de variáveis era 8, quando na verdade é 6.
  $Total = 144 \div 4 = 36$
- Como fizemos o algoritmo da independencia com $\Box$, temos que a resposta é
  $$2^6 - 36 = 28$$
  que de fato é a resposta correta!

Exemplo de uso

Vamos tornar $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \wedge d \wedge e) \vee (\neg d \wedge f)$ independentes de $\Box$

- Total=144
- Tinhamos fingido que o número de variáveis era 8, quando na verdade é 6.
  $Total = 144 \div 4 = 36$
- Como fizemos o algoritmo da independencia com $\Box$, temos que a resposta é
  $$2^6 - 36 = 28$$
  que de fato é a resposta correta!

Implementações

- Todos os algoritmos aqui apresentados foram implementos em Java
- Os algoritmos utilizavam as mesmas estruturas de dados e implementavam uma mesma interface
- As implementações tiveram que usar a classe BigInteger
- O Novo Método ainda contém bugs **na implementação**
- Parecem não sofrer pela transição de fase

A transição de fase

Diversos artigos apontam a existencia de uma "transição de fase" em relação à proporção Conjunções/variáveis. Isso parece não ocorrer com algorítmos baseados em contagem.

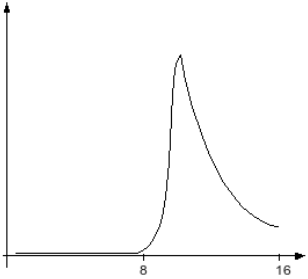
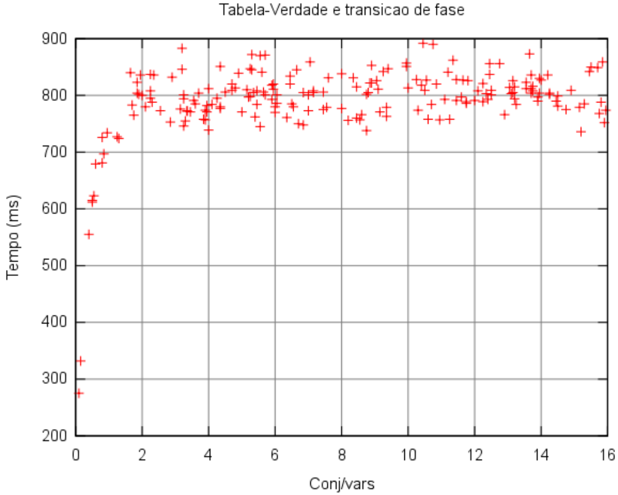
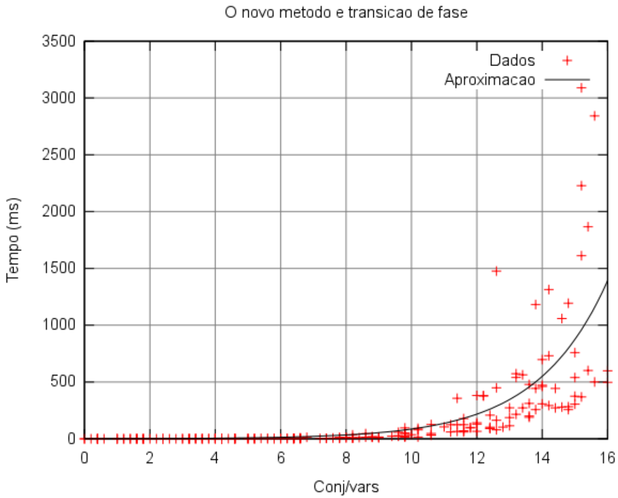


Figura: Baseado nos dados do artigo de Ian P. Gent e Toby Walsh

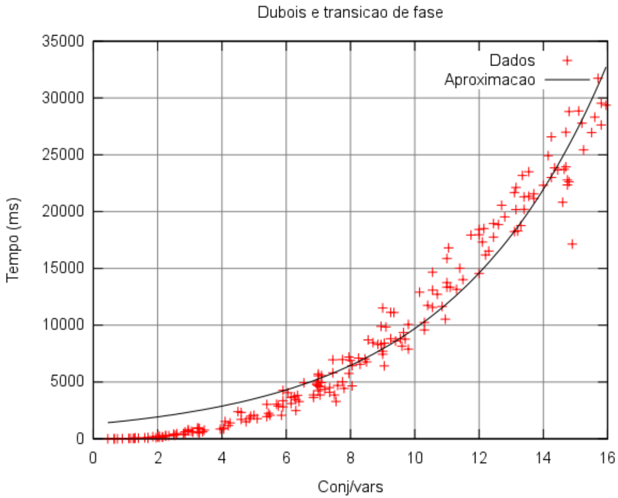
Transição de fase: Tabela-Verdade



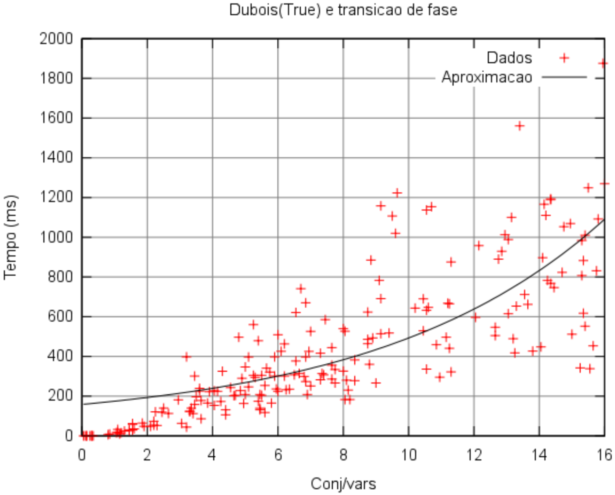
Transição de fase: Iwama



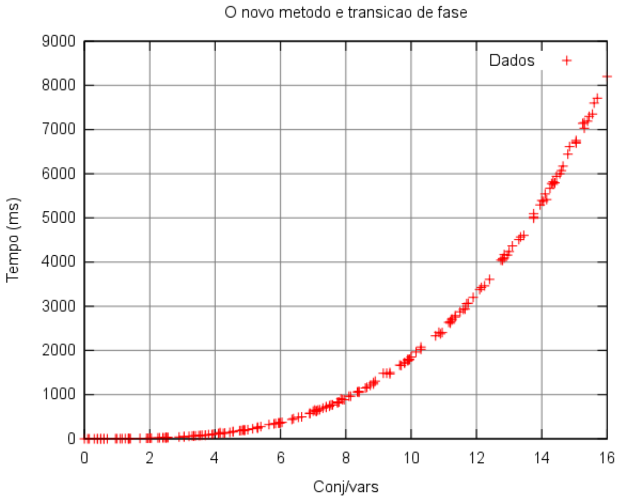
Transição de fase: Dubois



Transição de fase: Dubois-True



Transição de fase: Novo método



Trabalhos futuros

- Otimizar mais o novo algoritmo apresentado. Ele mostrou que tem bastante espaço para otimizações
- Explorar a relação crescente/decrescente no algoritmo de Dubois
- Estudo do impacto de saber o número de soluções em heurísticas e outras aplicações
- Testar os limites do problema #SAT e de métodos de contagem em geral

Perguntas?