



IME - Instituto de
Matemática e Estatística

Universidade De São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Ciência da Computação

MAC0499 Trabalho de formatura Supervisionado

Origami Computacional

Deise Harumi Aoki
deiseaoki@gmail.com
Rafael Antonio Cosentino
rcosen@gmail.com

São Paulo
4 de dezembro de 2006

Universidade De São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Ciência da Computação

Deise Harumi Aoki
deiseaoki@gmail.com
Rafael Antonio Cosentino
rcosen@gmail.com

Origami Computacional

MAC0499 Trabalho de formatura Supervisionado do Departamento de Ciência da Computação da Universidade De São Paulo para obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: *José Coelho de Pina Júnior*

São Paulo
4 de dezembro de 2006

Resumo

Neste projeto o foco será o estudo, implementação e animação de algoritmos para problemas em origami computacional, especialmente para problemas “dobrar e cortar” e de “construção de bases” de origamis.

A construção de uma base consiste em, dado um certo esqueleto que representa a estrutura do modelo desejado, indicando a sua conectividade, proporções e, principalmente, suas pontas, criar um diagrama que quando dobrado produza uma base com as características do esqueleto.

No problema dobrar e cortar nos é dado um polígono desenhado em um pedaço de papel retangular e o objetivo é produzir um diagrama que depois de dobrado permita que o polígono seja separado do restante do papel com um único corte de tesoura em linha reta. Para este problema implementamos o algoritmo sugerido por Marshall Bern e colaboradores [10] que utiliza técnicas de empacotamento de discos e diagrama de Voronoi.

Palavras-chave: Origami, Geometria Computacional, Empacotamento de Discos

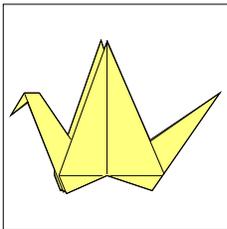
Sumário

1	Introdução	1
2	Moléculas	3
2.1	Triângulos	3
2.2	Quadriláteros	4
2.3	Combinando moléculas	9
3	Criação de bases	17
3.1	Bases	17
3.2	Bases tradicionais	17
3.3	Bases uniaxiais	21
3.4	Bases novas	22
4	Empacotamento de Discos	23
4.1	Pontas	23
4.2	Sobreposição	24
4.3	Polígonos axiais	25
4.4	Bases	26
5	Teoria do Esqueleto ou Arbórea	27
5.1	O Esqueleto	27
5.2	Os caminhos	29
5.3	Sub-esqueletos e Sub-bases	30
6	Dobrar e Cortar	33
6.1	Algoritmo	34
6.1.1	Cobertura dos vértices	34
6.1.2	Cobertura das arestas	35
6.1.3	Conexão dos componentes de disco	36
6.1.4	Redução dos arcogon's (gap's)	37
6.1.5	Definição das dobras	38
7	Parte Subjetiva	40
7.1	Desafios e frustrações	40
7.2	Disciplinas relevantes	40

Introdução

Acredita-se que, desde a invenção do papel, na China, há quase 2000 anos, o homem já dobrava pedaços de papéis para obter as mais diversas formas.

Monges budistas chineses levaram o papel e a prática de dobrar para o Japão. A arte do Origami tornou-se parte da cultura japonesa e foi no Japão que ela começou a tomar a sua forma atual. Com a popularização do papel, esta arte secular foi inserida no currículo escolar, deixando de ser transmitida apenas de pais para filhos. Hoje não podemos dizer que o Origami é uma arte exclusivamente japonesa, ela se difundiu pelo mundo todo e enriqueceu-se adquirindo características de diversas culturas.



A palavra origami deriva de duas palavras japonesas *oru* (dobrar) e *kami* (papel). De maneira simplificada, origami é a arte de dobrar papel nas mais diversas formas visuais ou esculturais como animais, insetos, barcos e etc [26, 36]. As definições a cerca do origami não são muito restritivas, deixando o processo de criação livre. Alguns tradicionalistas gostam de seguir algumas regras como por exemplo: sempre começar de um único pedaço de papel quadrado, não cortar nem colar o papel ou não utilizar qualquer instrumento auxiliar para executar as dobras. Essas regras acrescentam um grau de desafio na criação dos modelos. Mais sobre a história do origami pode ser visto nas páginas da internet mantidas por Eric M. Anderson [6], Hatori Koshiro [25], David Mitchell [33].

O processo de criação dos modelos foi se tornando cada vez mais complexo, conforme a arte do Origami desenvolveu-se. Sendo assim, os origamistas perceberam a necessidade da criação de uma linguagem ou notação que representasse o processo de dobradura. Por volta de 1950 o origamista Akira Yoshizawa desenvolveu uma notação composta por diversos símbolos gráficos e diagramas que se tornou padrão internacional. A notação é bem simples, a figura 1.1 mostra a convenção utilizada neste trabalho para os dois tipos de dobras, *vale* e *montanha*, a figura 1.1 mostra como são dobradas esses dois tipos. Mais sobre a notação utilizada pelos origamistas pode ser encontrado na página da internet *Oru Kami* [1].

Durante a criação de um modelo algumas dobras auxiliares (vincos) normalmente são feitas afim de facilitar o processo de dobradura. Porém nem os vincos nem informações sobre os passos que devem ser executados para obter o modelo final aparecem nos diagramas (*crease-patterns*). Somente as dobras que devem estar na forma final da dobradura são representadas. Aliás, dado um diagrama é uma tarefa computacionalmente não-trivial obter-se o processo de dobras que levam a uma certa forma desejada¹.

Além disso, existe ambigüidade na notação para os diagramas. A figura 1.2 mostra um

¹Mais precisamente, com isto queremos dizer que a tarefa é NP-difícil [9].

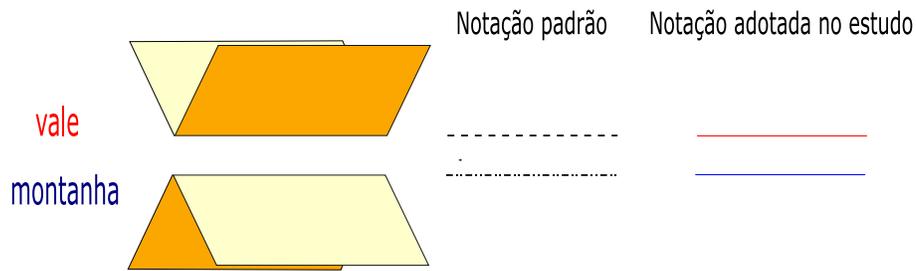


Figura 1.1 Dobras do tipo vale e do tipo montanha.

exemplo de um diagrama que pode ser dobrado de duas formas diferentes.

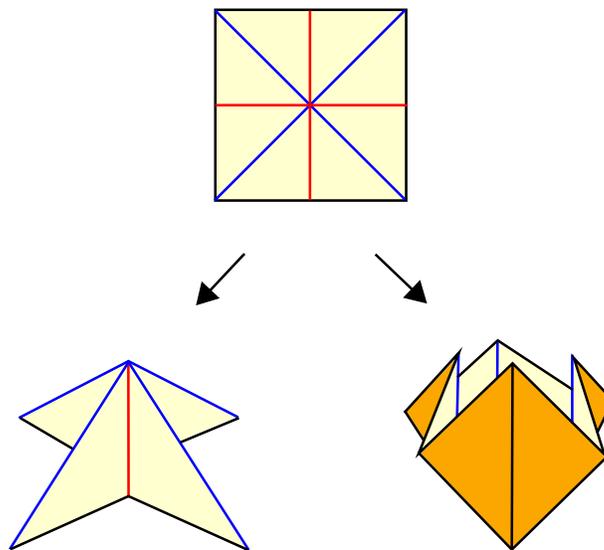


Figura 1.2 Ambigüidade da notação.

Segundo Robert J. Lang [26] as relações entre origami e ciência ocorrem em vários níveis e incluem diversas áreas da ciência. Lang classifica essas relações em três categorias:

origami matemático abrange a matemática que descreve as leis que regem os origamis;

origami computacional consiste de algoritmos e da teoria devotada a solução de problemas de dobraduras; e

origami tecnológico trata das aplicações de origami e dobraduras em geral para solucionar problemas que surgem em engenharia e na indústria.

Moléculas

Neste capítulo, estamos interessados em criar diagramas para dobrar os dois tipos de polígonos mais simples, triângulos e quadriláteros. Esses diagramas deverão resultar em modelos com as seguintes propriedades:

- o modelo é plano;
- os lados do polígono serão segmentos de uma única reta;
- os pontos de tangência devem estar em um único ponto para todo conjunto gerador do polígono (veremos adiante o que é ponto de tangência e conjunto gerador de polígono).

Os diagramas com as características acima são denominados **molécula**.

2.1 Triângulos

O diagrama **orelha-do-coelho** (rabbit ear) é a forma mais simples de dobrar um triângulo tal que o modelo final fique plano figura 2.1(a). A seguir, descrevemos, de forma sistemática, a construção deste diagrama:

1. As dobras do tipo montanha partem de cada vértice do triângulo e são traçadas sobre a bissetriz do correspondente ângulo até chegar no incentro do triângulo (incentro é o local geométrico onde as bissetrizes do triângulo se encontram).
2. Três dobras partem do incentro na direção dos lados do triângulo e formam ângulo reto com os mesmos. Escolhemos duas destas dobras e fazemos a orientação delas ser vale e a dobra que sobrou ser montanha.

Analizando o diagrama orelha-do-coelho percebemos que seria possível definir três círculos internamente disjuntos, com centros nos vértices do triângulo e tangentes dois a dois. Os pontos de intersecção desses círculos são os pontos de tangência. O conjunto desses três círculos é chamado de conjunto gerador do triângulo figura 2.1(b).

Podemos generalizar a idéia de conjunto gerador para um polígono qualquer. Um **conjunto gerador** de um polígono é um conjunto de círculos internamente disjuntos onde cada círculo tem como centro um dos vértices do polígono; cada vértice é centro de um círculo e somente um; cada círculo é tangente a exatamente dois outros círculos; e os centros de círculos que se tangenciam estão em um mesmo lado do polígono. Os **pontos de tangência** são os pontos de intersecção entre os círculos de um conjunto gerador.

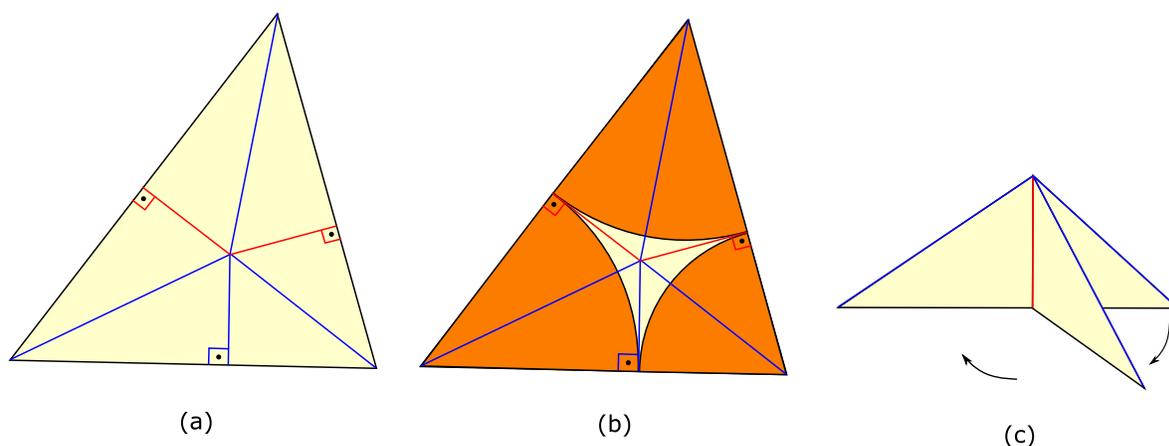


Figura 2.1 orelha-do-coelho.

Existe um único conjunto gerador para um dado triângulo figura 2.1(b), podemos mostrar isso usando semelhança de triângulos. Essa unicidade e o fato de os pontos de tangência serem definidos a partir dos círculos do conjunto gerador nos permite concluir que os pontos de tangência são fixos para um triângulo.

No modelo gerado pelo diagrama orelha-do-coelho, notamos que todos os lados do triângulo são segmentos de uma única reta r ; as dobras perpendiculares aos lados do triângulo são segmentos de uma única reta s , s é perpendicular a r ; e os pontos de tangência estão no ponto de intersecção de r com s .

Com essas propriedades o diagrama orelha-do-coelho é considerado uma molécula e pode ser usado para dobrar qualquer triângulo.

2.2 Quadriláteros

Uma das diferenças entre triângulos e quadriláteros é que triângulos possuem um único conjunto gerador e os quadriláteros possuem zero ou infinitos conjuntos geradores.

Suponha existir um conjunto gerador para um quadrilátero. Podemos formar dois pares de círculos tal que dois círculos estão no mesmo par se eles não são tangentes. Sempre podemos somar um valor positivo suficientemente pequeno aos raios dos círculos de um dos pares e subtrair o mesmo valor dos raios dos círculos do outro par para obter um outro conjunto gerador para o mesmo quadrilátero (Figura 2.2).

Isso nos permite concluir que um quadrilátero possui zero ou infinitos conjuntos geradores. Então construir uma molécula para quadrilátero não será tão simples como foi para o triângulo, pois para ser molécula um diagrama deve levar os pontos de tangência em um único ponto para **todo** conjunto gerador do polígono e neste caso podemos ter infinitos geradores.

Queremos construir uma molécula para dobrar quadriláteros que possuam conjunto gerador, pois os que não possuem não são de nosso interesse. Na seção anterior a maneira mais simples de dobrar triângulos funcionou então vamos tentar fazer o mesmo aqui.

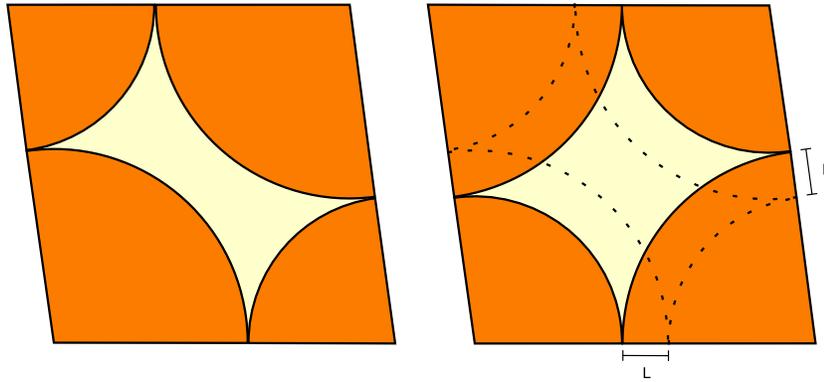


Figura 2.2 Dois conjuntos geradores de um mesmo quadrilátero.

A maneira mais simples de dobrar um quadrilátero que possua conjunto gerador de forma plana é usar o diagrama *waterbomb* figura 2.3. Esse diagrama usa o fato que todo quadrilátero gerado por círculos tem a propriedade de suas bissetrizes se encontrarem em um mesmo ponto. Isso é provado por Robert Lang [29]. A descrição do diagrama *waterbomb* é a seguinte:

1. dobras do tipo montanha são traçadas a partir de cada vértice do quadrilátero e em direção ao ponto de intersecção de todas as bissetrizes.
2. Três dobras do tipo vale e uma do tipo montanha são traçadas a partir do ponto de intersecção das bissetrizes na direção dos lados do quadrilátero, formando ângulo reto com o lado correspondente.

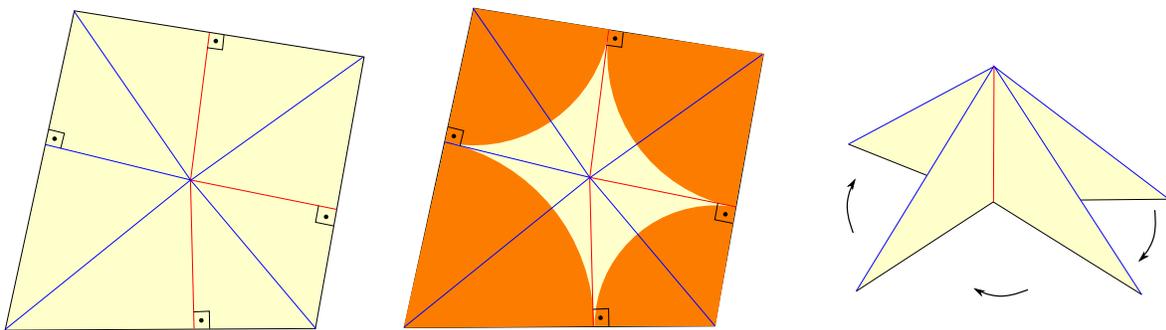


Figura 2.3 Diagrama *waterbomb*.

Perceba que quando dobramos o quadrilátero seguindo o diagrama *waterbomb*, todos os lados do quadrilátero são levados em uma mesma reta. Porém somente para um conjunto gerador este diagrama leva os pontos de tangência em um mesmo ponto.

Este conjunto é formado pelos quatro círculos que estão centrados nos vértices do quadrilátero e tangentes nos pontos de intersecção entre as dobras perpendiculares aos lados do quadrilátero e esses próprios lados. Podemos verificar que sempre existe este conjunto, usando semelhança de triângulos.

O diagrama que queremos deve levar os pontos de tangência em um mesmo ponto para qualquer conjunto gerador. Desta forma, o diagrama *waterbomb* não é adequado.

Robert Lang criou o diagrama **nesga** (gusset) que possui todas características necessárias para ser uma molécula. A figura 2.4 mostra o processo de construção deste diagrama.

1. Quatro dobras partem dos pontos de tangência perpendicularmente aos lados do polígono. Duas destas dobras encontram-se no ponto p e as outras duas no ponto q . Escolheremos três destas dobras e as faremos ser vale e a que sobra ser montanha. Sem perda de generalidade suponha que a dobra que foi escolhida para ser montanha incida no ponto p (Figura 2.4(a)).
2. Quatro dobras do tipo montanha partem dos vértices do polígono. Uma delas encontrará o ponto p e outra encontrará o ponto q , as demais ficam incompletas por enquanto (Figura 2.4(b)).
3. Duas dobras do tipo montanha partem do ponto p . Uma na bissetriz do ângulo (t_1, p, q) e outra na bissetriz do ângulo (t_4, p, q) , ambas encontram-se com dobras do tipo montanha que estavam incompleta. Analogamente, são criadas mais duas dobras do tipo montanha partindo do ponto q e traçadas sobre as bissetrizes (t_2, q, p) e (t_3, q, p) (Figura 2.4(c)).
4. Entre os pontos r e s é criada uma dobra do tipo vale. Entre os pontos p e q serão criadas duas dobras uma será montanha e a outra vale. Esta última é a que incide em p .

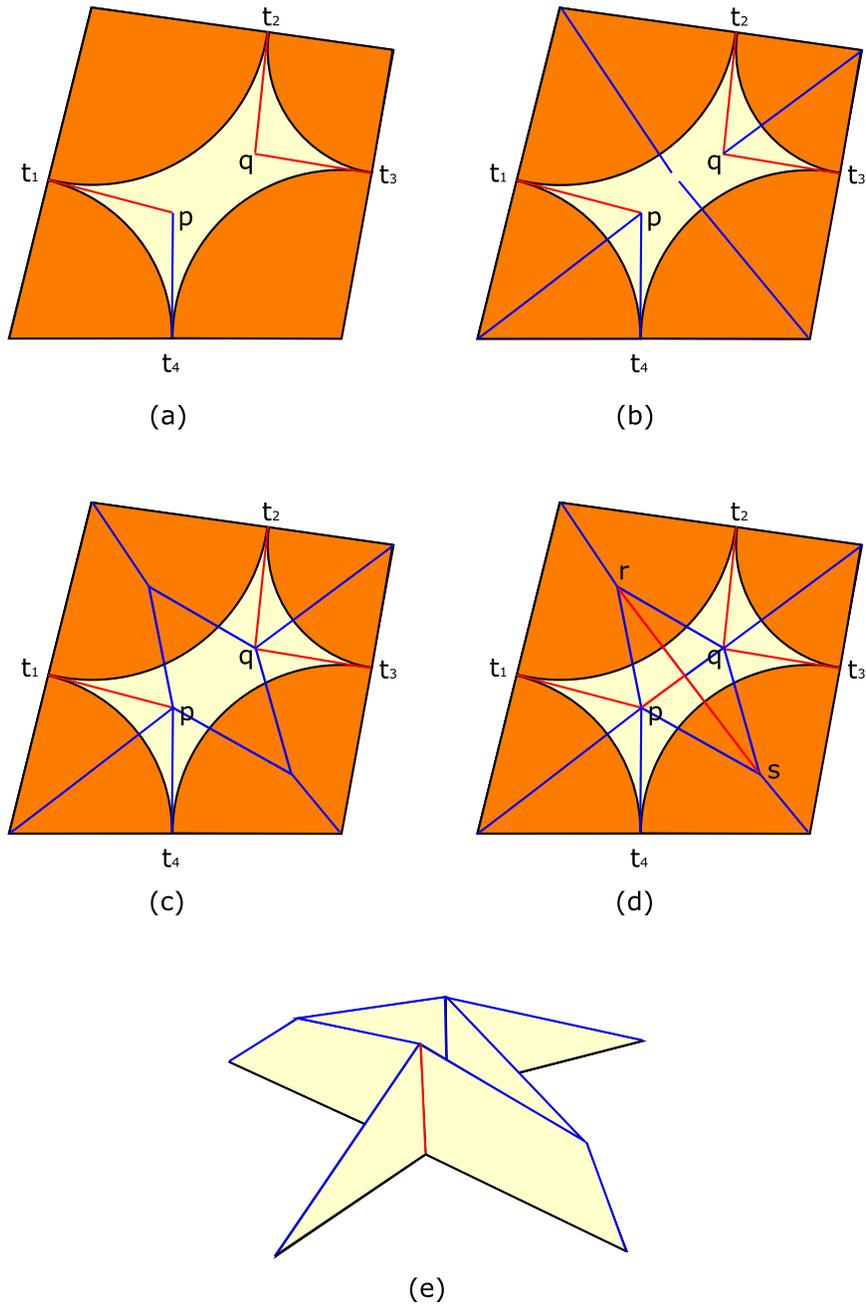


Figura 2.4 Diagrama *nesga*.

Para mostrar as duas moléculas, orelha-do-coelho e nesga, partimos dos polígonos (triângulos e quadriláteros); escolhemos algum conjunto gerador; e por fim definimos as dobras. Porém, perceba que poderíamos partir do conjunto gerador, obter o polígono e depois definir as dobras (Figura 2.5).

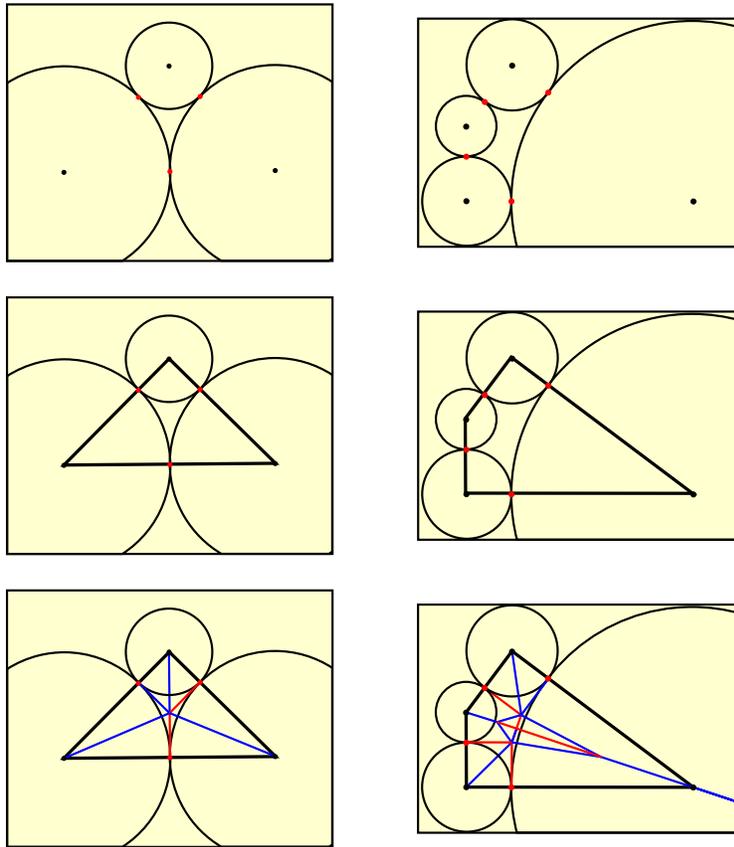


Figura 2.5

2.3 Combinando moléculas

Moléculas complexas são obtidas a partir da combinação de uma molécula qualquer, simples ou complexa, com uma molécula simples. As moléculas simples são: orelha-do-coelho e nesga. Diremos que o tamanho de uma molécula complexa é o número de moléculas simples que a compõe (Figura 2.6).

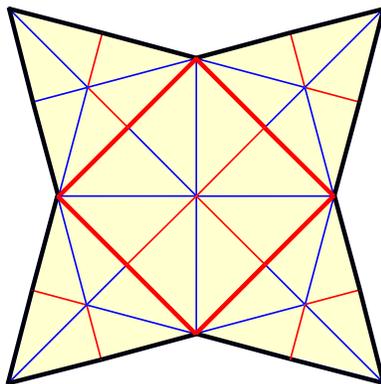
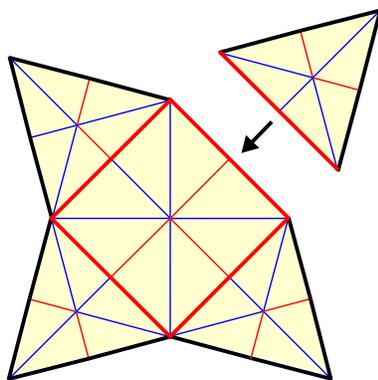
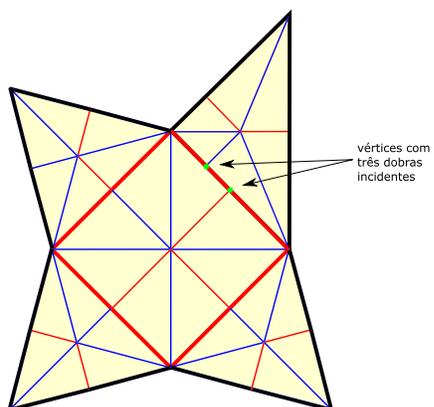
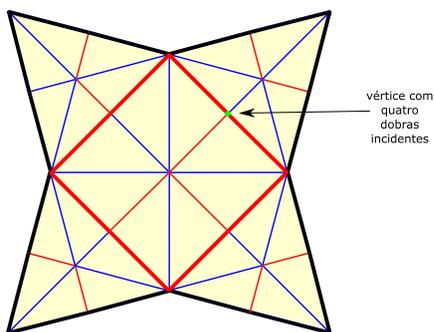


Figura 2.6 Molécula complexa de tamanho 5.

Quando combinamos duas moléculas, ao menos um dos lados do polígono da molécula complexa sobrepõe-se a um dos lados do polígono da molécula simples (Figura 2.7). Para ocorrer a sobreposição de dois lados, precisamos que estes tenham o mesmo comprimento. Esta seria a primeira condição para combinar duas moléculas.

Quando sobreposmos dois lados, um de cada polígono das duas moléculas que estão sendo combinadas, os pontos de tangência podem ou não ficar coincidentes. Se os pontos de tangência não coincidirem haverá três dobras incidentes a cada um destes pontos (Figura 2.8). Caso contrário teremos um ponto com quatro dobras incidentes (Figura 2.9). Pelo teorema de Maekawa ¹, deduzimos que, para podermos dobrar o papel, o número de dobras incidentes a um vértice interno deve ser par.

¹Maekawa mostrou que o número de dobras montanha menos o número de dobras vale incidentes a um vértice interno deve ser 2 ou -2 para que possamos dobrar o papel de forma plana.

**Figura 2.7****Figura 2.8****Figura 2.9**

Então uma segunda condição necessária para combinarmos duas moléculas é que os pontos de tangência dos lados que estão se sobrepondo devem coincidir. A primeira e a segunda condições equivalem a dizer que os discos que estão sobre os lados que estão se sobrepondo devem coincidir (Figura 2.10). Dizemos que duas moléculas, uma simples e uma complexa são compatíveis se satisfazem esta condição.

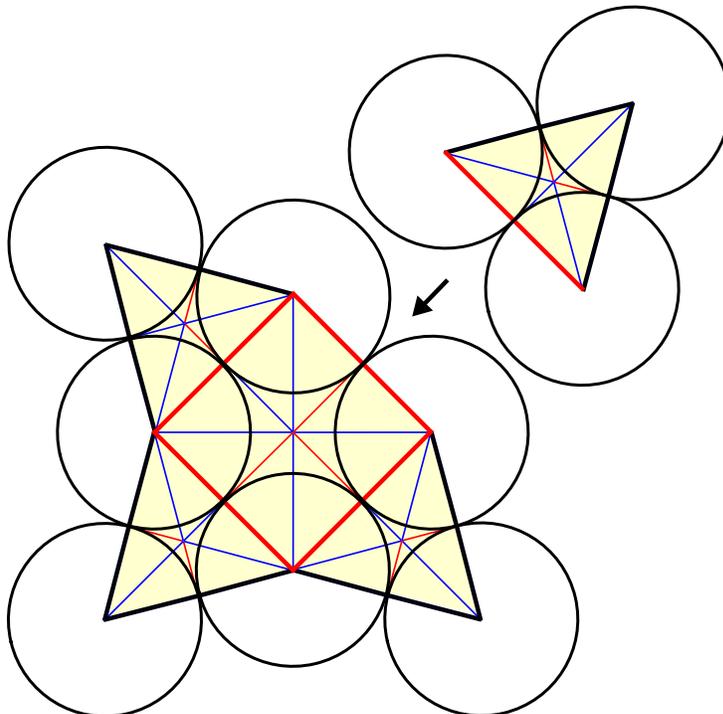


Figura 2.10

A nossa idéia é combinar as moléculas simples, das três formas possíveis (duas orelha-do-coelhos's, uma orelha-do-coelho com uma nesga e duas nesgas). Assim, obteremos as primeiras moléculas complexas (moléculas complexas de tamanho dois). Estas serão a base para a nossa prova por indução no tamanho das moléculas que mostrará que é possível combinar uma molécula complexa com uma simples e obter uma outra molécula complexa de tamanho maior.

Quando combinamos duas orelha-do-coelho's compatíveis, devemos acertar a orientação das dobras incidentes aos pontos de tangência que coincidiram. A orientação destas dobras é definida para respeitar o teorema de Maekawa (Figura 2.11). De forma análoga, orientamos as dobras ao combinar uma orelha-do-coelho com uma nesga (Figura 2.12) e duas nesgas (Figura 2.13).

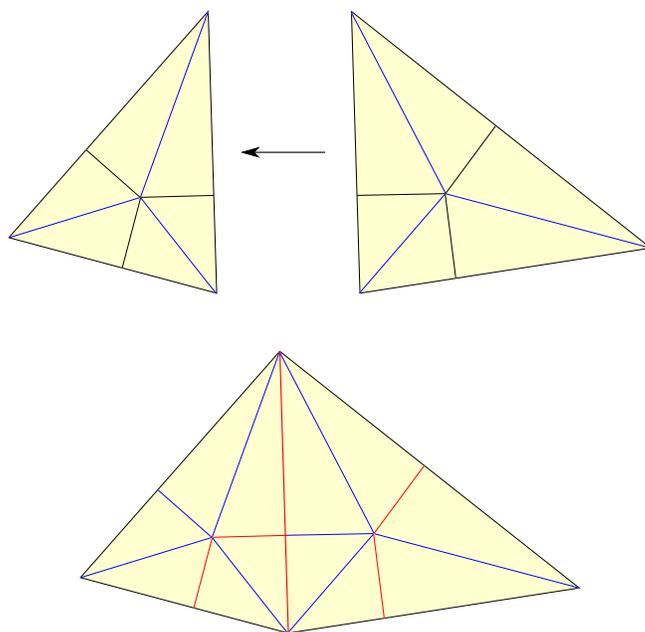


Figura 2.11 Combinando duas orelha-do-coelho's.

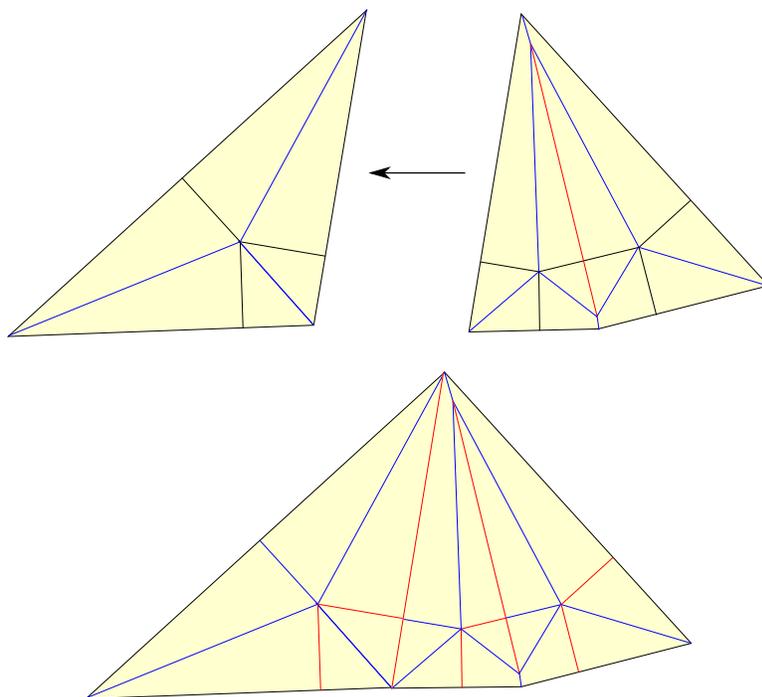


Figura 2.12 Combinando uma orelha-do-coelho com uma nesga.

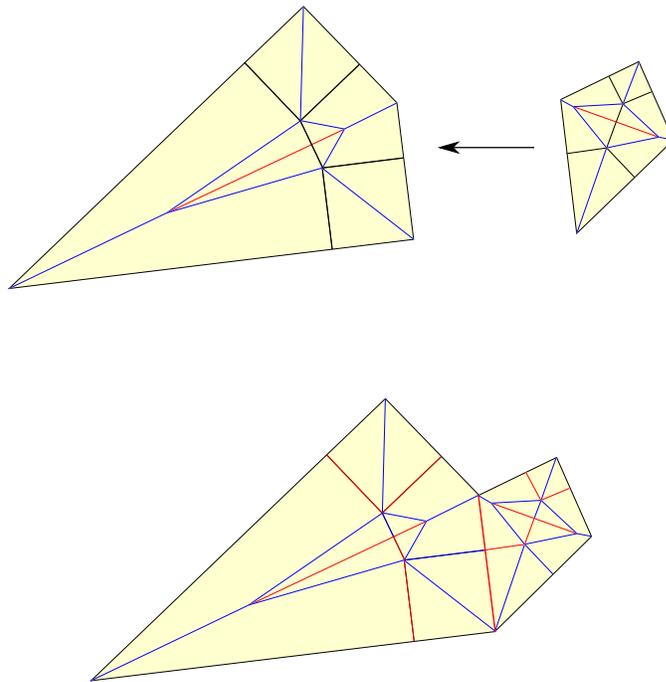


Figura 2.13 Combinando duas n-gas.

Analizando os três tipos de moléculas complexas de tamanho dois que obtivemos combinando as moléculas simples, observamos uma característica comum a elas. Nos vértices do polígono destas moléculas, o número de dobras do tipo montanha é o número de dobras do tipo vale mais uma unidade.

Vamos supor que essa característica esteja presente em qualquer molécula complexa de tamanho menor igual a um inteiro n ($n \geq 2$). Mostraremos que é possível combinar uma molécula complexa de tamanho n com as moléculas simples para obter uma molécula complexa de tamanho $n + 1$ mantendo a característica da nossa suposição. Para isso, mostraremos que é possível definir uma orientação para as dobras.

Há duas maneiras de combinarmos uma molécula complexa de tamanho n com a orelha-do-coelho. Na primeira, apenas um dos lados do triângulo da orelha-do-coelho se sobrepõe a um dos lados do polígono da molécula complexa; e há duas configurações possíveis para as dobras da molécula complexa. Na segunda, dois lados do triângulo da orelha-do-coelho se sobrepõem a dois lados consecutivos do polígono da molécula complexa; e há três configurações possíveis para as dobras da molécula complexa (Figura 2.14).

Em todas combinações, é possível definir a orientação das dobras tal que cada vértice interno respeite Maekawa para ser dobrável. E em cada vértice externo, ou seja, em cada vértice do polígono da molécula complexa resultante, é mantida a propriedade que o número de dobras do tipo montanha é o número de dobras do tipo vale mais uma unidade. Como mostra a figura 2.14.

Há três maneiras de combinarmos uma molécula complexa de tamanho n com uma nesga. Na primeira, apenas um dos lados do quadrilátero da nesga se sobrepõe a um dos lados do polígono da molécula complexa; e há duas configurações possíveis para as dobras da molécula complexa. Na segunda, dois lados do quadrilátero da nesga se sobrepõem a dois lados consecutivos do polígono da molécula complexa; e há três configurações possíveis para as dobras da molécula complexa. Na terceira, três lados do quadrilátero da nesga se sobrepõem a três lados consecutivos do polígono da molécula complexa; e há seis configurações possíveis para as dobras da molécula complexa. Analogamente a orelha-do-coelho, conseguimos definir uma orientação para as dobras que mantenha as propriedades necessárias.

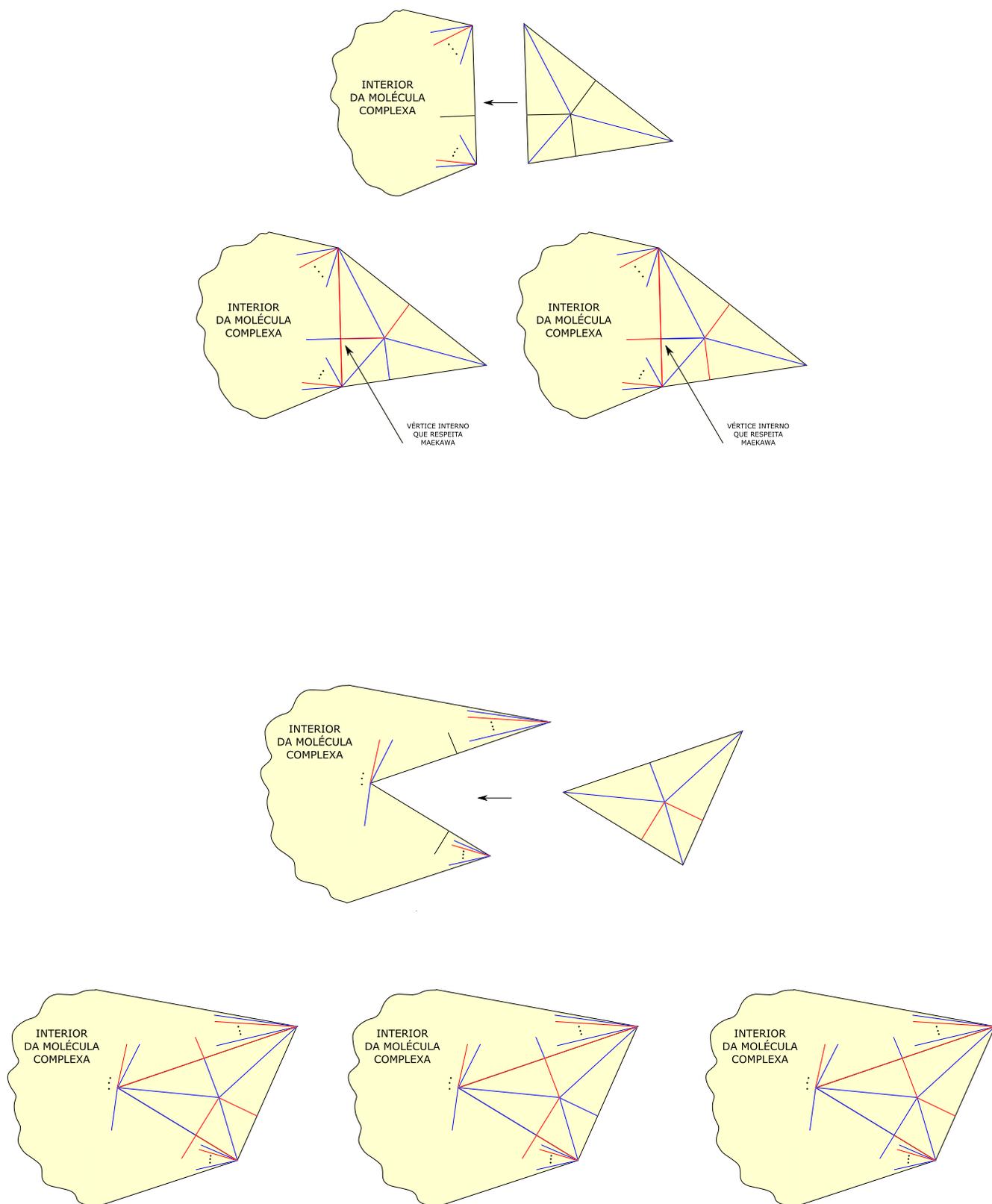


Figura 2.14 As maneiras de combinar uma molécula complexa com uma orelha-do-coelho.

Perceba que as moléculas simples que compõem uma molécula complexa são todas compatíveis, ou seja, discos de moléculas simples vizinhas coincidem. Então, uma outra forma de enxergar o problema é primeiro pensar nos discos. Poderíamos criar um empacotamento de discos que particione o polígono em triângulos e quadriláteros onde usaremos a orelha-do-coelho e a nesga respectivamente.

Observando uma molécula complexa, notamos que o perímetro do polígono desta molécula é formado por raios ou diâmetros de discos tangentes e internamente disjuntos. Portanto, o empacotamento deve conter discos tal que o perímetro do polígono seja formado por raios ou diâmetros destes discos. Além disso, o empacotamento contém discos que particionam o interior do polígono em triângulos e quadriláteros, onde serão usadas as moléculas simples (orelha-do-coelho e nesga) (Figura 2.15).

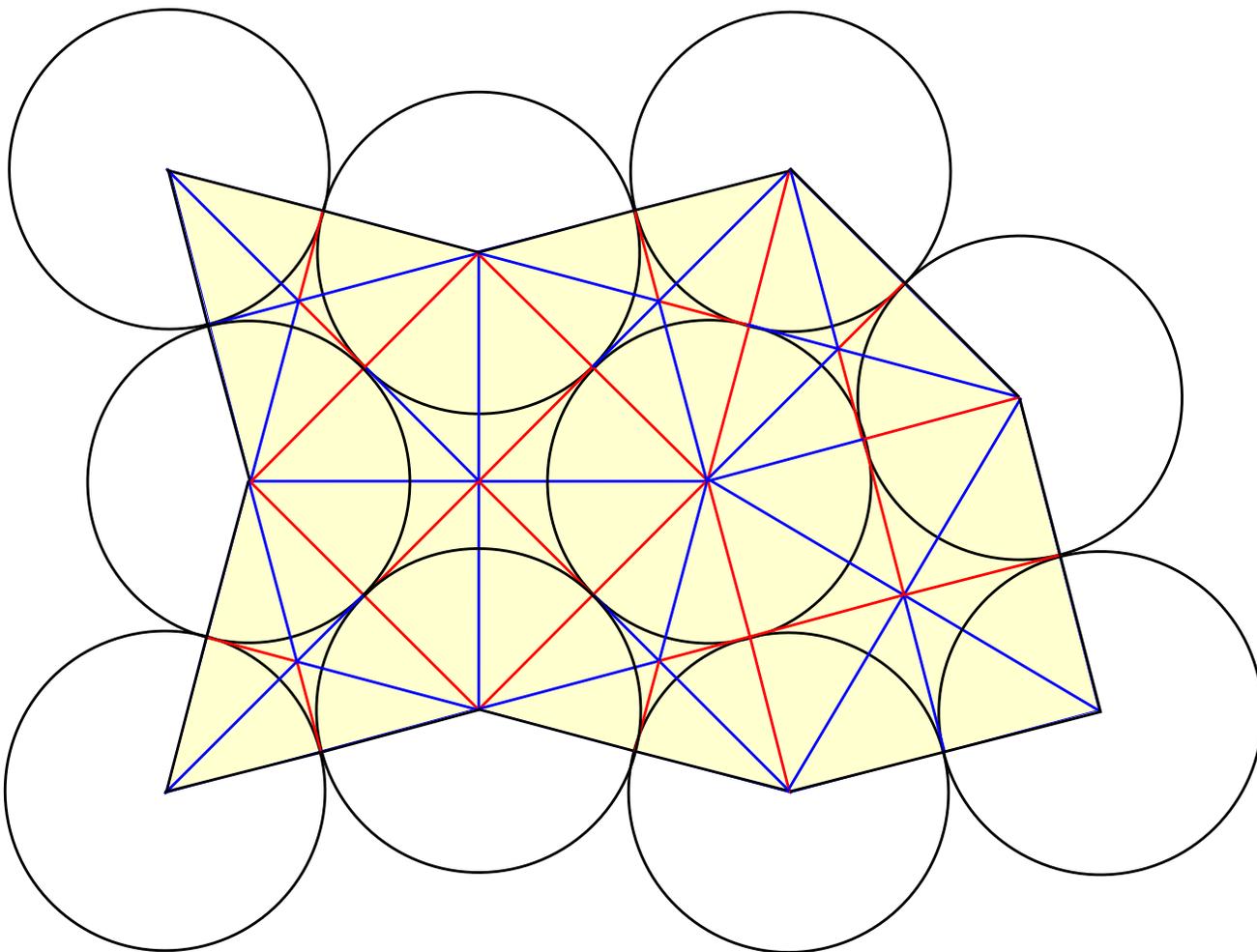


Figura 2.15

Criação de bases

O projeto de um origami pode ser dividido em duas partes: dobrar uma base e dobrar os detalhes. Uma **base** é uma forma geométrica que tem uma estrutura similar ao do modelo desejado, e, mais precisamente, tem o mesmo número de pontas e as proporções entre elas são iguais na base e no Modelo. Uma vez que obtemos a base, o artista usa a sua criatividade para dobrar os detalhes de cada ponta, a fim de obter o modelo desejado.

Estudamos dois métodos de obtenção de uma base: o **método do empacotamento de discos** e o **método do esqueleto** que podem ser usados em conjunto para obtenção de uma base, de forma algorítmica. O TreeMaker é um programa desenvolvido por Robert J. Lang [27] que implementa alguns desses métodos e que auxilia na obtenção de certos tipos de bases.

Dada uma árvore, que representa a base do origami desejado indicando sua conectividade, proporções e, principalmente, suas “pontas”, o TreeMaker é capaz de gerar um diagrama que após dobrado produz essa base. A partir do diagrama o origamista deve dobrar a base e realizar o acabamento de cada uma das partes; uma tarefa artística nada fácil.

3.1 Bases

Os modelos japoneses antigos derivaram principalmente de um número pequeno de bases que puderam ser usadas para construir diferentes pássaros, flores e várias outras figuras. Na maior parte do século vinte, a maioria das construções de origamis, derivaram das, comumente chamadas, bases tradicionais.

Essas bases ajudaram e atrapalham os origamistas pois: por um lado oferecem um ponto de partida para um novo origami; por outro lado, limita a criatividade do origamista, já que ele começa a sentir que nada novo pode ser feito com essas bases.

Começaremos com um introdução sobre as bases tradicionais para que entendamos as motivações para construir bases novas.

3.2 Bases tradicionais

Não há um conjunto fixo de bases tradicionais, mas existem quatro formas, todas com mais de cem anos de idade, que são base de diversos modelos tradicionais japoneses, e têm uma relação elegante entre elas. Elas são frequentemente chamadas de “As Quatro Bases Clássicas do Origami” e são nomeadas conforme os modelos mais famosos dobrados a partir deles: a **casquinha de sorvete**, **Peixe**, **Pássaro** e **Lírio** ou **Sapo**.

Não existe uma definição precisa de uma base; uma definição que funciona bem é “uma

forma geométrica com a mesma forma geral e/ou mesmo número de pontas (*flaps*) que o modelo desejado”.

As bases clássicas são:

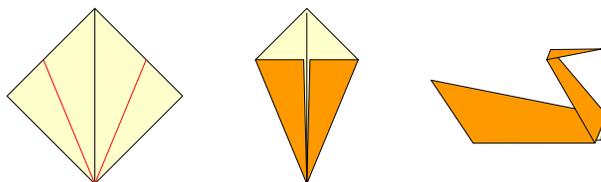


Figura 3.1 Base casquinha de sorvete

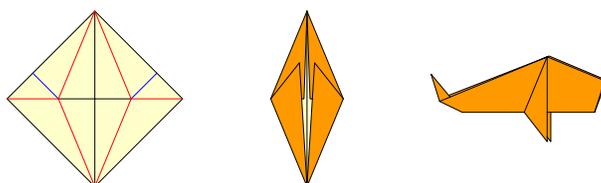


Figura 3.2 Base do peixe

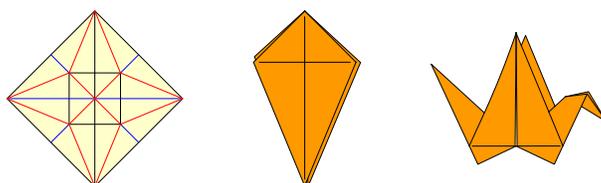


Figura 3.3 Base do pássaro

Existem outras bases que são freqüentemente chamadas de tradicionais: **base da porta**, **base do catavento**, **base preliminar** e **base do balão**. Estas oito bases podem ser relacionadas da seguinte maneira:

No contexto do origami, **ponta** é a região do papel que pode manipulada com relativa independência das outras partes do modelo. Em um projeto de origami podemos pensar nas bases como um conjunto de pontas, onde pontas maiores correspondem a apêndices maiores no modelo final. As bases casquinha de sorvete, peixe, pássaro e lírio têm, respectivamente, um, dois, quatro e cinco pontas maiores e um, dois, um e quatro pontas menores. Para dobrar um animal, normalmente precisamos começar com uma base que tenho o mesmo número de pontas que o número de apêndices do animal. Um peixe simples tem duas pontas grandes (cabeça e cauda) e duas pontas pequenas (nadadeiras), razão pela qual a base do Peixe é tão apropriada para tal. Um vertebrado terrestre têm, geralmente, cinco grandes pontas (cabeça e quatro membros), que sugere o uso da base do sapo.

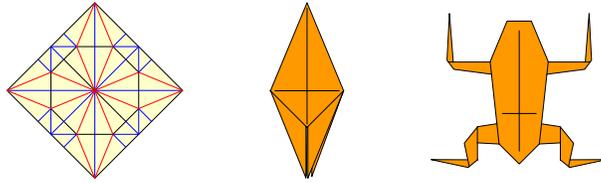
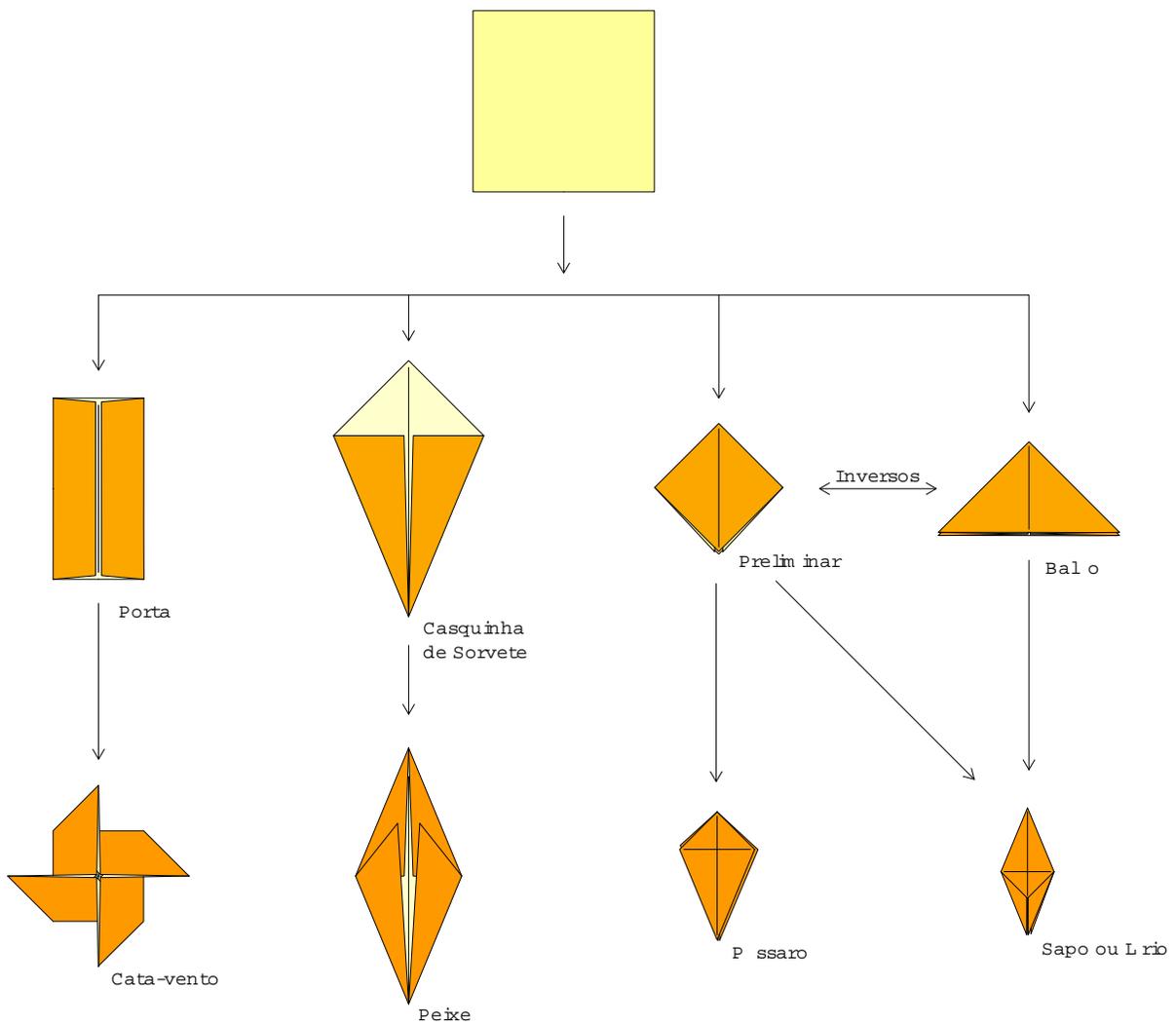


Figura 3.4 Base do sapo

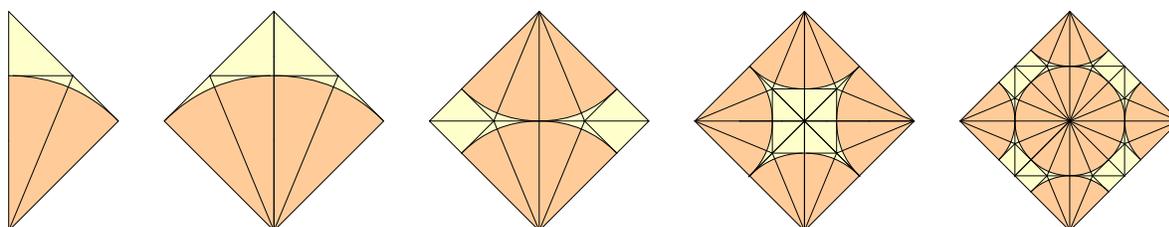


No meio do século vinte, Akira Yoshizawa desenvolveu um caranguejo baseado na Blintzed Frog Base, com sessenta e quatro cópias do triângulo; mais recentemente, Robert J. Lang, desenvolveu um ouriço-do-mar que tem 128 cópias deste triângulo, o que cria uma base com 25 pontas de igual tamanho. Este padrão foi observado pela primeira vez por Kenneway. Os primeiros diagramas sugerem uma relação entre triângulo e pontas.

Base	Triângulos	Pontas
Kite	2	1
Fish	4	2
Bird	8	4
Frog	16	5
Urchin	128	25

Estes três primeiros diagramas sugerem que o número de pontas é exatamente a metade do número de triângulos na base, mas observando os dois exemplos posteriores vimos que tal padrão não é válido sempre.

Então não há uma relação simples entre o número de triângulos e suas pontas finais. Mas, mesmo assim, existe uma relação entre eles. Vamos desenhar um arco de disco na unidade do triângulo; então, desenhe este arco em cada triângulo das bases posteriores.



O triângulo básico contém $1/8$ unidade de disco. Quando combinados formam, respectivamente, $1/4$, $1/2$ e discos inteiros. Se contarmos o número de discos (inteiros ou não) distintos, temos:

- um quarto de disco para a base da casquinha de sorvete;
- dois quartos de disco para a base do peixe;
- quatro quartos de disco para a base do pássaro;
- quatro quartos de disco mais um disco inteiro para a base do sapo.

Um, dois, quatro e cinco - estes são exatamente os números de pontas para as bases da casquinha de sorvete, do peixe, do pássaro e do sapo, respectivamente. Explicaremos mais adiante a relação de uma ponta com um disco.

3.3 Bases uniaxiais

A maioria das bases vistas até agora, compartilham duas características em comum:

- todas as pontas se encontram em uma única reta;
- o segmento chamado de dobradiça (reta perpendicular no triângulo) de qualquer ponta é perpendicular àquela mesma reta.

Esta linha é chamada de **eixo da base**, e qualquer base que possua um eixo que é único, é chamada de **base uniaxial**.

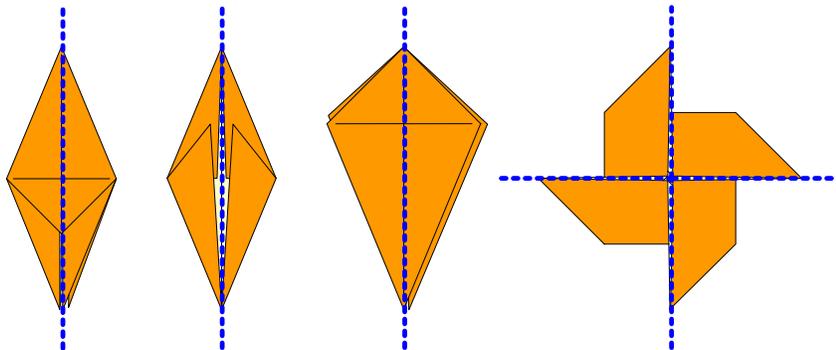


Figura 3.5 As três primeiras bases (da esquerda para a direita: sapo, peixe e pássaro) são bases uniaxiais, já a última base (cata-vento), possui dois eixos, e portanto não é uniaxial.

Bases uniaxiais são comuns no origami, e eles têm várias propriedades que facilitam sua construção e manipulação.

Nem todos os modelos são uniaxiais, por exemplo, a base do cachorro de John Montrol e a base do catavento que não deixam de ser bases eficientes para a construção destes modelos específicos.

Devemos observar que uma base pode ser ou não uniaxial dependendo da **orientação da base** escolhida, em outras palavras, do eixo que você está escolhendo. No exemplo de bases uniaxiais dado acima, foram mostrados eixos que separam simetricamente a base. Isto geralmente acontece, mas por exemplo, na base do balão, se desenharmos o eixo na linha de simetria, descobriremos que os limites do papel não estão no eixo e as dobradiças não são tangentes ao eixo então, não é uma base uniaxial. Todavia, se rotacionarmos a base 90°, podemos redesenhar o eixo ao longo dos limites do papel, assim, as tangentes ficarão perpendiculares ao eixo e a base, agora, é uma base uniaxial com uma nova orientação.

As dobras que estão no eixo na base formam um conjunto especial; eles são chamados de **dobras axiais** (*axial creases*) no diagrama. Estão destacadas abaixo as dobras axiais de algumas bases já citadas, assim como os limites do papel que estão no eixo.

Observe que a rede de dobras axiais divide o diagrama em uma coleção de polígonos distintos cujos limites são inteiramente compostos por tanto dobras do eixo ou limites do papel. Podemos chamar estes polígonos de **polígonos axiais**.

3.4 Bases novas

Os polígonos de axiais do diagrama têm uma propriedade interessante: na base dobrada, o perímetro inteiro de cada polígono se alinha em uma linha em comum - o eixo do modelo. Você pode observar esta propriedade pegando uma base e cortando ela ao longo de seu eixo, separando a base e logicamente seu diagrama, em pedaços.

Como cada um dos polígonos axiais tem seu perímetro alinhado com o eixo, podemos dividir este diagrama, cortando a base dobrada ao longo do eixo, separando a base em pedaços.

Esta observação nos permite pensar na criação de uma base de uma forma diferente: como unir polígonos de axiais, reduzindo o problema, em um problema de unir os pedaços de modo que obtenhamos todas as pontas desejadas em nossa base e que estes pedaços unidos, formem um quadrado.

Observando cada **ladrilho** do diagrama notamos que eles têm uma estrutura muito parecida com as moléculas apresentadas no segundo capítulo.

De fato, se colocarmos os discos em cada um dos ladrilhos, de modo que cada centro de disco se localize no ápice de uma ponta, obteremos moléculas já estudadas e que sabemos que conseguimos achar um diagrama para cada uma delas e que é possível uní-los.

Podemos até, utilizar ladrilhos com mais de quatro lados. Existem algumas técnicas para conseguir dobrar diagramas de moléculas de mais de quatro lados, por exemplo: podemos tentar inserir um disco no meio do ladrilho, e inchá-lo até que não sejam mais possível inchá-lo sem sobrepor algum disco. Assim, teremos dividido a região do ladrilho, em ladrilhos de ordem menor, que, potencialmente, conseguiremos dobrar.

Robert J. Lang conseguiu formular um problema de programação não linear que, quando resolvido, devolve um diagrama com as dobras de uma molécula de qualquer ordem. Tal molécula é chamada de **molécula universal** [27].

Empacotamento de Discos

No final do capítulo anterior, vimos que o empacotamento de discos surge de uma maneira natural quando observamos a união de várias moléculas. Na verdade, o empacotamento de discos cai muito além disso, e iremos ver neste capítulo com eles são utilizados para criar pontas em novas bases.

4.1 Pontas

Observando o diagrama de um base, podemos separar as pontas(ou os discos) em três tipos:

- pontas de canto, que são as pontas cujos ápices estão em um vértice do papel quadrado, ou seja, cujo disco correspondente tem seu centro exatamente em um vértice do quadrado;
- pontas de aresta, que são as pontas cujos ápices estão em um dos lados do quadrado, ou seja, cujo disco correspondente tem seu centro em um dos lados de apenas um lado do quadrado;
- pontas interna, que são as pontas cujos ápices estão dentro dos limites do quadrado, ou seja, cujo disco correspondente tem seu centro, somente dentro do quadrado (excluindo seus limites).

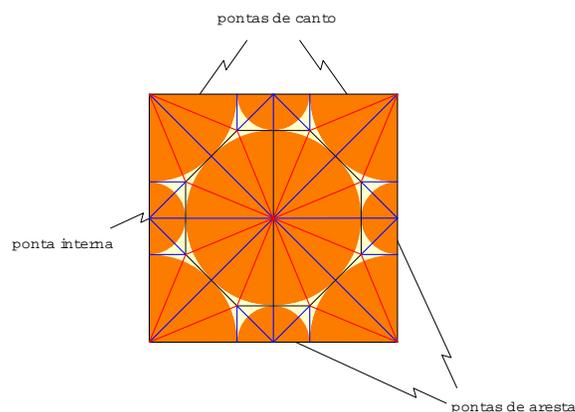


Figura 4.1 Tipos de pontas que aparecem nos diagramas.

O papel, usado para fazer uma ponta, só pode ser utilizado somente em uma ponta. Então, toda vez que você cria um ponta de um quadrado, uma porção do quadrado é consumida por esta ponta. A principal razão pela qual dividimos as pontas em três tipos, é que cada tipo consome uma quantidade diferente de papel. Primeiro vamos entender qual área do papel a ponta consome:

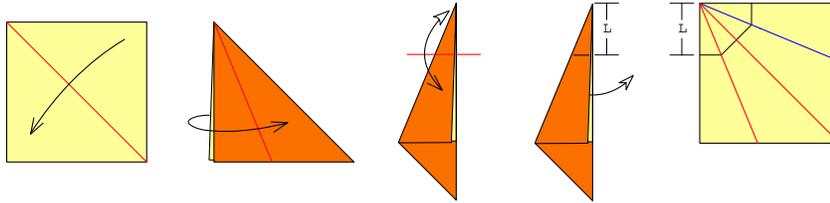


Figura 4.2 Imagine que escolhemos um tamanho de ponta. Então, dobramos o papel algumas vezes e marcamos esta ponta.

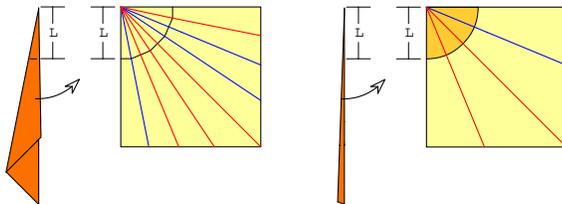


Figura 4.3 Imagine que dobramos o papel infinitas vezes.

Da figura podemos concluir que, a quantidade de papel consumida por uma ponta é a área ocupada pelo disco (ou parte do disco) que a representa. Portanto, pontas de canto gastam menos papel que pontas de aresta que gastam menos papel que pontas de meio.

4.2 Sobreposição

Pela seção anterior, concluí-se que os empacotamentos achados, não podem conter sobreposições, pois caso contrária, uma ponta estaria consumindo papel que deveria ser consumido por outra ponta.

Esta propriedade se estende para qualquer tipo de base, independente do método de como ela é feita ou se a base é ou não uniaxial.

Se você tem um diagrama com N discos em um quadrado, é evidente que uma condição necessária é que, estes discos não devem se sobrepor, mas não é evidente que esta condição é suficiente. Esta propriedade se tornará mais evidente mais para frente.

Usando esta propriedade, podemos substituir o problema de construção de bases, pelo problema de empacotamento de discos: desenhe N discos que não se sobrepõem cujos centros se encontram dentro de um quadrado, ou pelo menos, em suas bordas. Tal empacotamento de discos garante que estamos disponibilizando papel suficiente para cada ponta. Um conjunto de pontas desejado, podem gerar diferentes bases, já que podemos mudar a localização dos discos.

Se um empacotamento de discos pode ser dividido em ladrilhos tais que os discos em cada ladrilho combine com o ladrilho ao lado, então, podemos dobrar o diagrama completo destes mesmos ladrilhos.

4.3 Polígonos axiais

Considere aqueles ladrilhos vistos anteriormente. Eles são de dois tipos: triângulos e quadriláteros. Nos dois tipos de ladrilhos, os discos deles se tangenciam ao longo das arestas de ladrilho, os quais são dobras axiais. De fato, o único lugar que os discos se tocam, é ao longo das dobras axiais. Isto é mais que coincidência; podemos mostrar que existem dobras axiais nos pontos em que os disco se tangenciam. As dobras axiais criadas, dividem o quadrado em polígonos axiais; se formos suficientemente sortudos, os polígonos axiais são ladrilhos conhecidos, podemos estipular dobras para cada ladrilho, e podemos usar as dobras resultantes para dobrar uma forma plana.

Assim, as bases usadas para ilustrar como ladrilhar podem ter sido derivadas diretamente e empacotamento de discos baseados no número de pontas desejado para o objeto final. Nós representamos cada ponta desejada por um disco; empacotamos os discos em um quadrado, e então construímos dobras axiais que limitam cada ladrilho.

Os diagramas de discos também permite que nós possamos pensar no problema de eficiência. Se representarmos cada ponta do modelo, por um disco de mesmo tamanho e desenharmos os discos em um quadrado, você pode facilmente achar as posições dos discos que devolve a base mais eficiente que contém este número de pontas(nem sempre tal base é elegante).

Como o comprimento da ponta é igual ao raio do disco correspondente, se nós elaborarmos a base colocando os discos no quadrado e representando cada ponta por um disco, a base mais eficiente que vem desta configuração é o resultado de achar uma configuração que maximize o tamanho dos raios, respeitando as proporções. Podemos então, escrever um algoritmo para elaboração de uma base:

- contar o número de anexos do objeto desejado e guardar seus comprimentos;
- representar cada ponta da base desejada por um disco cujo raio é igual ao comprimento da ponta;
- posicionar os disco em uma quadrado tal que os discos não se sobreponham e que os centros dos disco estejam dentro do quadrado;
- conecte os centros dos discos que se tangenciam com dobras axiais, dividindo o quadrado em polígonos axiais;
- identifique os ladrilho cujos discos que correspondem aos polígonos formados;

- complete o polígono axial com dobras.

O diagrama resultante pode se dobrado em uma base com o número e dimensão das pontas do início.

4.4 Bases

Em origami, empacotamentos de discos de tamanhos diferentes, acontecem com mais frequência do que com discos de tamanhos iguais. Porém, se a base desejada, possui todas as suas pontas de comprimentos iguais, temos então que empacotar discos de raios iguais. Este problema de empacotar discos de raios iguais que não se sobrepõem, com seus centro dentro do quadrado, é equivalente ao problema de empacotar estes discos inteiramente dentro de um quadrado maior.

Este segundo problema de empacotamento, é um campo bem estudado na área de matemática. Destes estudos, podemos tirar empacotamentos ótimos, que vão resultar em bases eficientes.

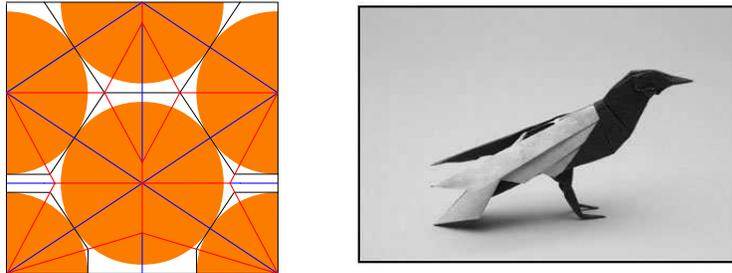


Figura 4.4 Dobrado e elaborado por Robert J. Lang. Esta foto foi tirada do site do Lang [26]

Teoria do Esqueleto ou Arbórea

Existe uma outra maneira de pensar no problema de construção de bases que consiste em, dado um esqueleto (basicamente um grafo que é uma árvore), onde representamos as pontas da base e suas proporções e conseguimos obter um diagrama planar de uma base uniaxial com as características descritas no esqueleto.

5.1 O Esqueleto

Podemos representar uma base com um conjunto de segmentos que são unidos por vértices e que formam um árvore. Cada segmento corresponde a uma ponta, e tem o tamanho desta ponta e têm um vértice em comum com toda ponta que encontra nela.

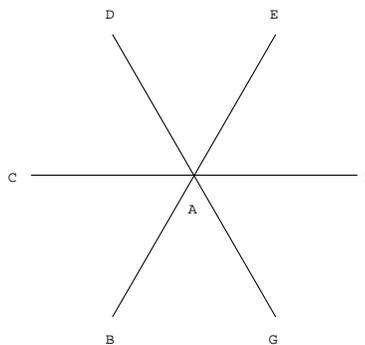


Figura 5.1 Esqueleto de uma base com seis pontas de mesmo tamanho.

A representação da base pelo esqueleto é útil pois não depende que precisemos atribuir todas as dobras do diagrama. Tal esqueleto se relaciona com um empacotamento de discos da seguinte maneira:

- cada círculo é representado por um segmento e tamanho de cada segmento será igual ao tamanho do raio do disco;
- se quaisquer dois discos se tangenciam, então os segmentos respectivos se unem por um ponto de suas extremidades.

Esta representação da base é chamada de **esqueleto da base**. Emprestando alguns nomes da teoria de grafos, o esqueleto consiste basicamente de arestas(segmentos) e nós(vértices).

Dividiremos os nós em dois tipos: **folhas** são os nós que correspondem ao ápice de uma ponta; e **nós internos** que são os nós formados onde duas ou mais arestas se encontram.

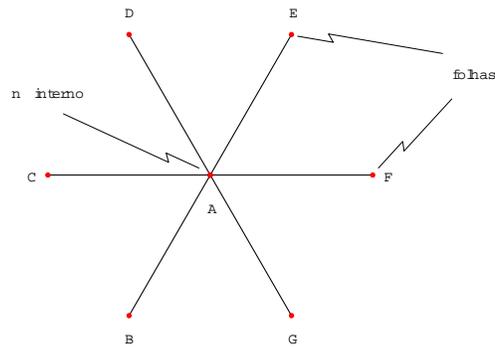


Figura 5.2 Esqueleto da base e os tipos de vértices.

Cada uma das arestas tem um **peso** que é o comprimento de sua ponta.

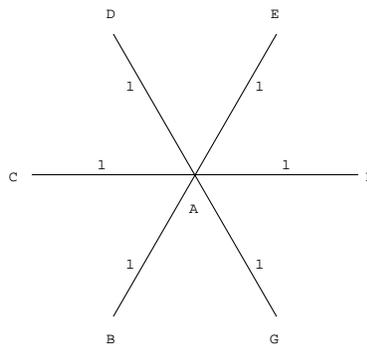


Figura 5.3 Esqueleto e suas proporções dos comprimentos das pontas.

Podemos interpretar este esqueleto como sendo a projeção da base em um plano chamado **plano de projeção**, quando:

- todas as suas pontas se alinham em uma linha comum, o eixo;
- os segmentos tangentes estão perpendiculares ao eixo.

O fato dos segmentos tangentes serem perpendiculares ao eixo, é importante pois esta característica permite que as pontas da base possam ser manipuladas ao longo de um plano.

Esta analogia pode ser usada para qualquer base, com uma consideração: às vezes, teremos bases que, ao serem orientadas como base uniaxial, geram pontas que estão dentro de outra ponta. Neste caso, representaremos tal projeção, desenhando a ponta que está escondida, mas que existe.

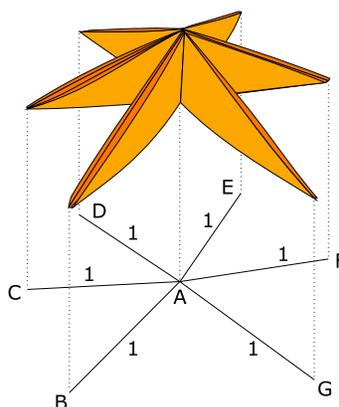


Figura 5.4 Projeção da base da tartaruga. Note que as pontas desta base pode se movimentar livremente na direção do plano de projeção

5.2 Os caminhos

Quando dobramos uma base, podemos marcar no papel, onde estão as pontas desta base. Olhando a figura, podemos observar que a distância absoluta de uma marca no papel até a outra, é maior ou igual que a distância de um nós correspondentes no esqueleto, se caminharmos pelo esqueleto.

Esta restrição deve valer para quaisquer dois pontos da base que contém um nó correspondente no esqueleto. Portanto, pode-se identificar um conjunto de pontos no quadrado relacionados com todos as folhas do esqueleto, tais que a distância de cada vértice satisfaça a característica evidenciada acima, então é garantido que existem um diagrama que transforma o quadrado em uma base, cuja projeção é o esqueleto dado. Lang nomeou este teorema como Teorema da Árvore (ou Esqueleto). A prova deste teorema foi dada por Lang no artigo “A computational algorithm for origami design” [27].

Para uma dado esqueleto, existem diversas soluções dos lugares das folhas, e cada uma delas leva a uma base diferente. Lembrando que devemos escalonar o esqueleto, para que ele aproveite ao máximo, o quadrado.

Escolhemos uma configuração qualquer:

A linhas sólidas estão indicando quais das arestas têm o tamanho mínimo possível. Chamaremos tais linhas de **caminhos ativos** (*active paths*) que têm uma característica em comum: qualquer caminho ativo entre duas folhas forma uma aresta da base que alinha-se no plano de projeção da base, ou seja, caminhos ativos tornam-se dobras axiais.

O teorema do esqueleto, nos permite apenas, termos uma idéia de como pode ser construída uma base, mas ainda não é suficiente.

Olhando com mais detalhes, podemos colocar neste rascunho do diagrama, onde os nós do esqueleto aparecem.

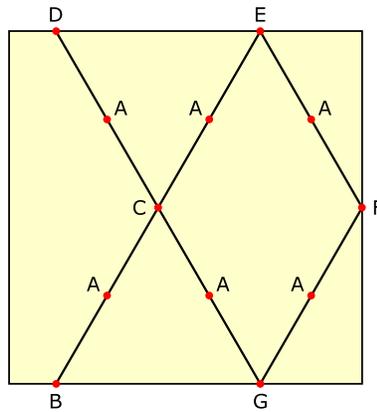


Figura 5.5 Esta é uma configuração válida qualquer das posições das pontas da esqueleto que contém seis pontas de tamanho igual.

5.3 Sub-esqueletos e Sub-bases

Sabendo que caminhos ativos tornam-se dobras axiais, o padrão de bases uniaxiais se divide em polígonos axiais. Em alguns dos polígonos, todos os seus lados são caminhos ativos, em outros, observamos a presença de um lado do quadrado com sendo um lado do polígono axial. Cada polígono axial tem a propriedade que todos ou seus lados podem ser mapeados para o plano de projeção da base quando o quadrado é dobrado em uma base. Conseqüentemente, para achar um diagrama que transforme o quadrado em uma base, é necessário achar um diagrama que mapea o conjunto de polígonos axiais no plano de projeção da base.

Cada um dos polígonos axiais, quando dobrado, transforma-se em uma **sub-base**, e a projeção desta sub-base representa uma porção do esqueleto da base chamado **sub-esqueleto**.

Note que, como todos os cantos de um polígono axial devem ser do tipo folha, os polígonos que tem o limite do papel como um de seus lados, não são polígonos axiais, e na realidade, não acrescentarão nada à base final.

Sabemos que, para dobrar todos estes polígonos juntos, temos que achar dobras compatíveis com cada polígono que está vizinho a outro.

Repare que podemos acrescentar a este diagrama, discos com centro nas folhas e de raio igual ao tamanho da ponta da base.

Agora podemos resolver o problemas de dobrar cada polígono axial, que revelou-se ser uma molécula.

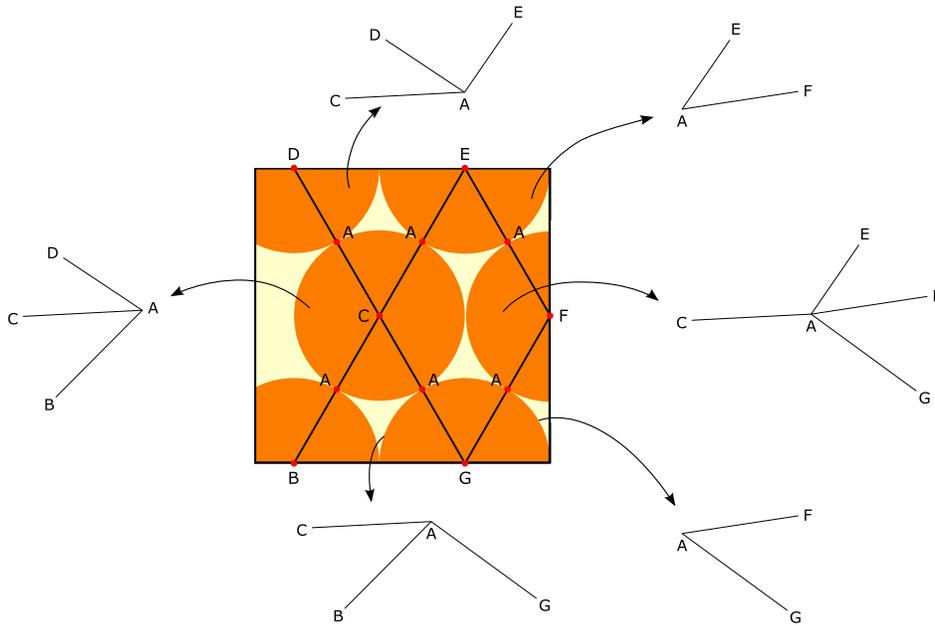


Figura 5.6 Cada região deste diagrama parcial, é responsável por gerar um pedaço do esqueleto.

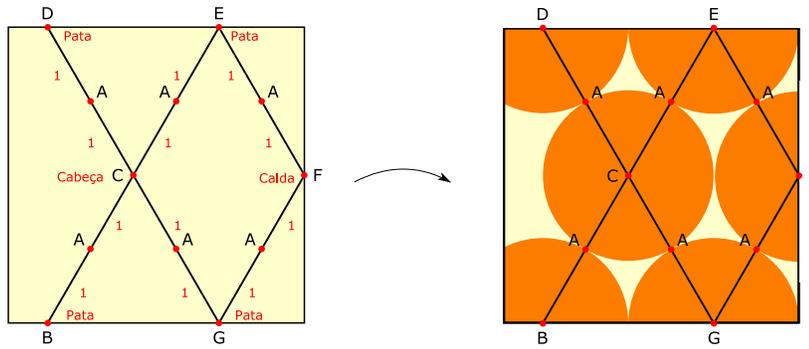


Figura 5.7 .

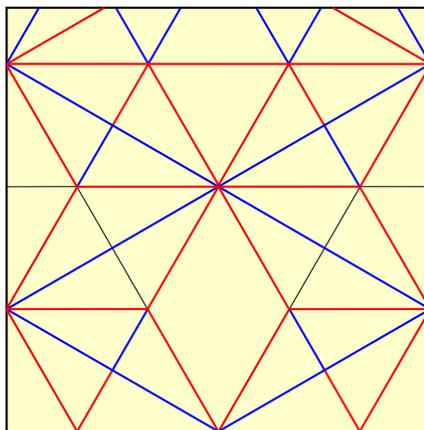


Figura 5.8 Como cada região é uma molécula, conseguimos atribuir as dobras para cada região.

Dobrar e Cortar

Seja P como sendo um polígono, eventualmente com buracos, e R como um retângulo, com $P \subseteq R$. Você pode imaginar R como sendo uma folha de papel e que P esteja desenhado nesta folha.

Nós queremos definir um diagrama, digamos D , que nós permita dobrar o papel representado por R de forma que todos os lados de $P \cup R$, e somente eles, sejam colocados um sobre o outro. Em outras palavras, queremos que D leve os lados de $P \cup R$, e somente eles, em um mesmo plano, digamos α . Este problema é conhecido como o **problema de dobrar e cortar**. Mas onde entra o cortar nisso?

Do modo que D foi definido, se estivéssemos interessados em obter um pedaço de papel na forma de P bastaria dobrar o papel de acordo com D e fazer um corte de tesoura no plano α , dizemos que ao fazer este corte separamos P de R . Perceba que os lados de R não necessitam estar no mesmo plano junto com os de P mas fazemos isso para simplificar mais tarde.

Este problema foi primeiramente sugerido por Kan Chu Sen em [34], não exatamente como descrevemos acima mas em essência são a mesma coisa. Pode parecer que nem sempre exista um diagrama com as características para resolver o problema de dobrar e cortar mas Marshall Bern, David Eppstein, Barry Hayes e Erik Demaine apresentaram uma prova formal de que sempre existe tal diagrama em [12].

Além disso, eles apresentaram duas maneiras de obter uma solução para o problema de dobrar e cortar. Uma delas usa o conceito de straight-skeleton e a outra usa empacotamento de discos como sub-rotina e a técnica de divisão e conquista. Nós implementamos a segunda maneira e iremos apresentar o algoritmo a seguir. O código da nossa apresentação pode ser visto no repositório do Google sob o projeto JOrigami.

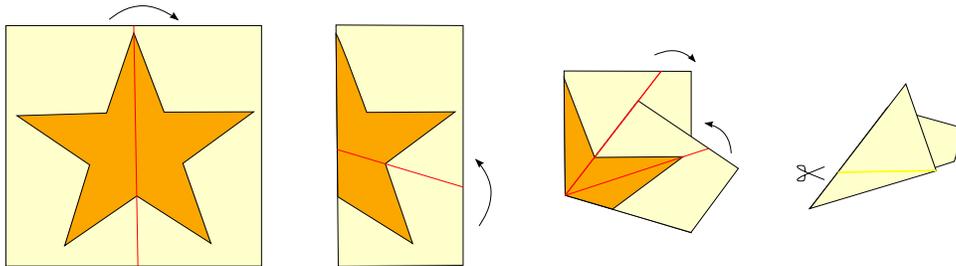


Figura 6.1

6.1 Algoritmo

A idéia do algoritmo é construir uma partição S de R composta de triângulos e quadriláteros. E depois definir um diagrama que leve o perímetro de cada elemento de S em um mesmo plano.

O problema dobrar e cortar pede que os lados de $P \cup R$ fiquem em um mesmo plano então é necessário que eles também sejam lados de elementos de S , pois os últimos serão levados em um mesmo plano.

Porém, desta maneira, os lados de $P \cup R$ não estarão sozinhos no mesmo plano. Ao efetuarmos o corte para separar P de R estaríamos cortando coisas que não devíamos. Para ficar de acordo com o problema dobrar e cortar podemos supor que os lados de $P \cup R$ têm alguma espessura suficiente para na hora de efetuarmos o corte que separa P de R , o interior ou o exterior de P não sejam cortados também.

No capítulo ??, vimos que é possível dobrar um conjunto de triângulos e quadriláteros, como S , de forma que o perímetro de cada um desses polígonos fiquem em um mesmo plano. Para tanto basta que os elementos de S sejam gerados por discos.

Aí é que entra o empacotamento de discos, o problema de dobrar e cortar se reduz a contruirmos um empacotamento para definir S e depois o diagrama que resolve o problema.

O nosso algoritmo divide-se em cinco etapas, o objetivo nas duas primeiras será fazer com que os lados de $P \cup R$ sejam formados por raios ou diâmetros de discos. Mas não serve qualquer conjunto de discos, esse conjunto deve ter duas propriedades: os discos não se sobrepõem e cada disco encosta em pelo menos outros dois.

Definição 6.1. Dois discos a e b serão considerados sobrepostos se $a \cap b$ tem pelo menos dois pontos e será considerado que um toca o outro se $a \cap b$ tem exatamente um ponto.

Desta forma os lados $P \cup R$ também serão lados da partição S que será definida pelo empacotamento de discos que estamos construindo, conseqüentemente os lados serão colocados em um mesmo plano.

Agora vamos ao algoritmo em si, observe que podemos tratar $P \cup R$ como um grafo, digamos G . Os vértices e as arestas de G são os cantos e os lados de $P \cup R$ respectivamente.

6.1.1 Cobertura dos vértices

Para cada $v \in V(G)$ definimos o disco c_v , com centro em v e raio igual a metade da menor distância de v até as arestas de G que não incidem em v . Observe que esses discos não se sobrepõem.

Além disso, cada disco c_v , como definido acima, intersecta exatamente duas arestas e_{vw} e e_{vu} de G nos pontos p e q respectivamente (e_{ab} é a notação para a aresta definida pelos vértices a e b). Remova de G as arestas e_{vw} e e_{vu} , acrescente a G quatro novas arestas e_{vp} , e_{vq} , e_{pw} e e_{qu} , e dois novos vértices p e q . Perceba que as arestas e_{vp} e e_{vq} são raios do disco c_v , dizemos que c_v cobre essas arestas e o vértice v e que c_v é um disco de canto (Figura 6.2).

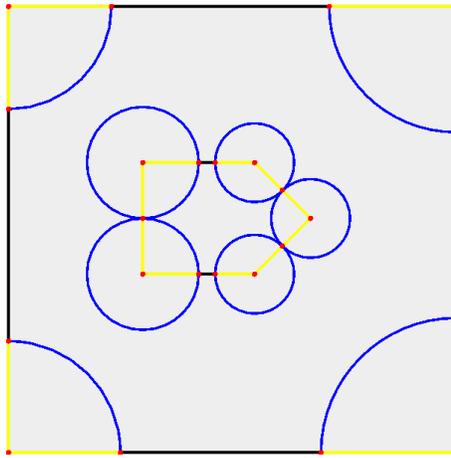


Figura 6.2 Final da etapa de cobertura dos vértices

6.1.2 Cobertura das arestas

Neste momento, o grafo G tem arestas cobertas pelos discos de canto, criados anteriormente, e as arestas não cobertas que precisam ser cobertas.

Para cada aresta a que ainda não está coberta, definimos o disco c_a com centro no ponto médio de a e raio igual a metade do comprimento de a , dizemos que c_a é o disco de rotação da aresta a (Figura 6.3).

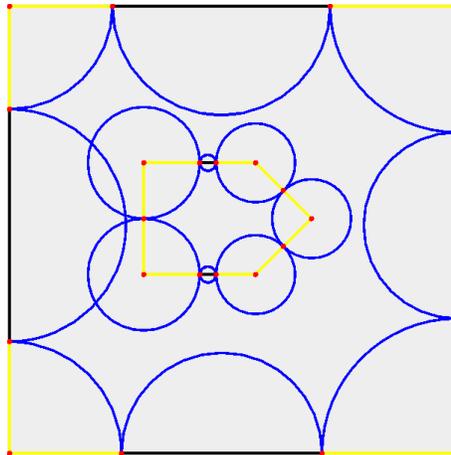


Figura 6.3 Começo da etapa de cobertura de arestas

Agora todas as arestas de G são formadas por raios de discos de canto ou por diâmetros de discos de rotação, denominaremos essa propriedade de propriedade fundamental. Porém, não temos a garantia que esses discos não se sobrepõem.

Neste momento temos duas alternativas para eliminar essas possíveis sobreposições. A primeira é dividir todos os discos de rotação sucessivamente até não haver mais sobreposições.

Esse método foi sugerido por Demaine e colaboradores (Figura 6.4).

Para dividirmos um disco de rotação c_a faremos o seguinte: sejam r e s os vértices da aresta a ; removemos a aresta a de G ; fazemos m ser o ponto médio de a ; acrescentamos as arestas e_{rm} e e_{ms} ; trocamos o disco c_a pelos discos de rotação das duas novas arestas. Dividindo os discos desta maneira preservamos a propriedade fundamental.

A segunda maneira é dividir o maior disco de rotação que se sobrepõe a um outro disco, como descrito acima, até não haver mais sobreposição. É importante que o disco a ser dividido seja o maior porque caso contrário o algoritmo poderia entrar em loop infinito.

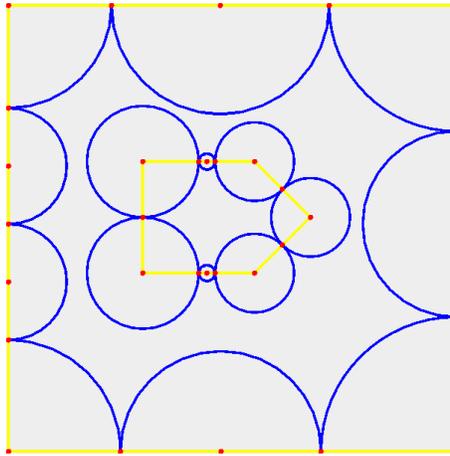


Figura 6.4 Final da etapa de cobertura de arestas

6.1.3 Conexão dos componentes de disco

Neste ponto do algoritmo, podemos ter vários componentes de disco. Nós desejamos conecta-los para obter um único. A figura 6.4 mostra dois componentes de disco.

Definição 6.2 (Componente de disco). Um conjunto C de discos que não se sobrepõem é dito componente de disco se $\forall p, q \in C$ existe uma sequência de discos, digamos i_1, \dots, i_n onde $i_1 = p$, $i_n = q$ e $i_j \cap i_{j+1}$ é exatamente um ponto, com $j = 1, \dots, n - 1$.

Os componentes podem ser conectados usando a seguinte idéia: escolha qualquer um dos componentes para ser o componente principal; conecte, sucessivamente, ao principal o componente que esteja mais próximo do mesmo, faça isso até não haver mais componentes para conectar (Figura 6.5).

Essa idéia é uma variação do algoritmo de Prim para determinar árvores geradoras mínimas. Para esse algoritmo precisamos ter uma definição do que é distância entre componentes de disco e como conectar dois componentes.

Definição 6.3 (Distância de componentes de disco). A distância de dois componentes A e B ($dist(A, B)$) é a menor distância entre um disco de A e um de B .

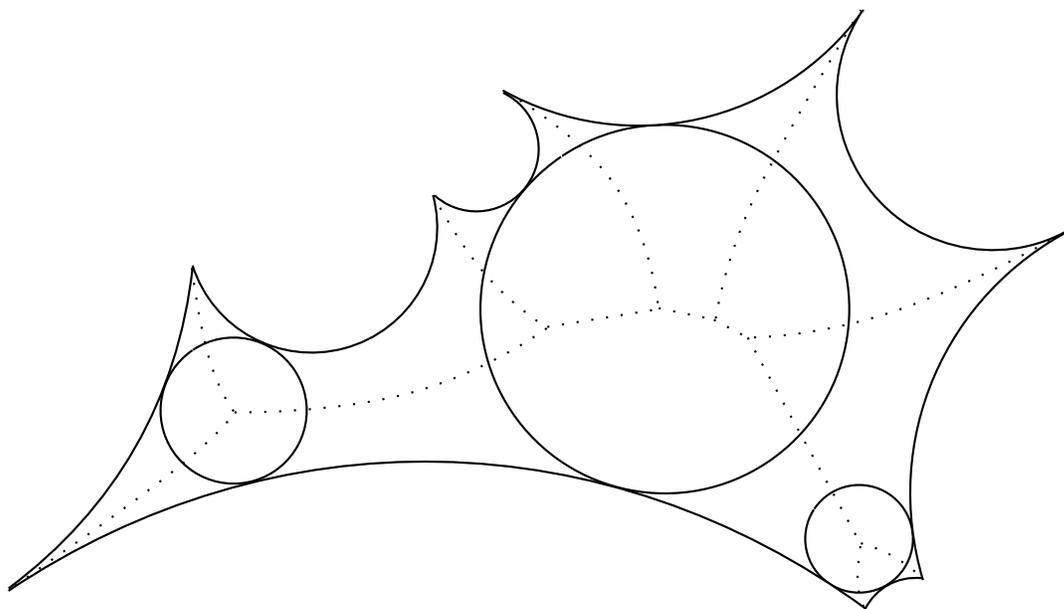


Figura 6.6 Arcogon com seu diagrama de Voronoi

6.1.5 Definição das dobras

No capítulo ?? vimos que é possível definir as dobras para cada triângulo e quadrilátero usando a molécula orelha-do-coelho e a nesga respectivamente. A única coisa que precisamos fazer é determinar uma ordem para combinar as moléculas. Isto é feito contruindo uma árvore das moléculas.

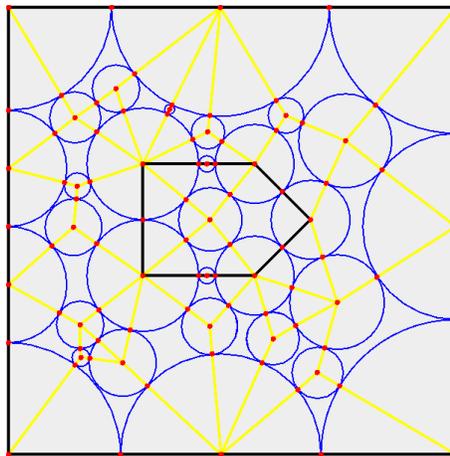


Figura 6.7 Final da etapa de redução dos arcogon's. Repare que R é particionado em quadriláteros e triângulos.

Parte Subjetiva

7.1 Desafios e frustrações

O meu desafio inicial foi achar uma iniciação científica que realmente me interessasse. Depois desta procura, no começo deste ano(2006), comecei a me reunir com o professor José Coelho de Pina Júnior, com o aluno da graduação Rafael Antonio Cosentino e com o aluno do mestrado Paulo Silveira, onde conversávamos bastante. As reuniões foram fundamentais para que nós produzíssemos mais e para que cada um contasse os progressos da semana. O segundo desafio que enfrentei foi administrar o tempo, pois no início, eu tinha que ler bastante, e algumas vezes ficava dobrando os modelos do livro, que supostamente ajudariam no entendimento do livro (digo que alguns deles realmente ajudaram). Minha maior frustração foi não conseguir estudar adequadamente toda a teoria descrita no livro que foi proposto para eu ler [29].

7.2 Disciplinas relevantes

As disciplinas mais relevantes para este trabalho foram:

- **MAT0128** - Álgebra Linear Para Computação: foi útil para o entendimento da representação das dobras no computador;
- **MAC0325** - Otimização Combinatória: ajudou a lidar com a manipulação de estrutura de dados usadas na implementação do algoritmos do problema de dobrar e cortar;
- **MAC0110** - Introdução a Ciência da Computação; **MAC0122** - Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos, **MAC0323** - Estrutura de Dados: serviram com base para o desenvolvimento do algoritmo em geral e o uso da linguagem Java.

Referências Bibliográficas

- [1] Oru kami - origami do rudi. <http://www.astrolabioazul.com/orukami/>.
- [2] Tsune Abe. sem título. *British Origami*, (108):9, 1984.
- [3] Oswin Aichholzer and Franz Aurenhammer. Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. In Jin yi Cai and C.K. Wong, editors, *Proceedings of the Second Annual International Conference on Computing and Combinatorics (COCOON)*, volume 1090 of *Lecture Notes In Computer Science*, pages 117–126, 1996.
- [4] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, David Alberts, and Bernd Gärtner. A novel type of skeleton for polygons. *Journal of Universal Computer Science*, pages 752–761, 1995.
- [5] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.
- [6] Eric M. Andersen. Paper folding. <http://www.paperfolding.com/>.
- [7] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Joseph S. B. Mitchell, Saurabh Sethia, and Steven S. Skiena. When can you fold a map? *Computational Geometry: Theory and Applications*, 29(1):23–46, September 2004. Special issue of selected papers from the 10th Annual Fall Workshop on Computational Geometry, 2000.
- [8] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Joseph S. B. Mitchell, Saurabh Sethia, and Steven S. Skiena. When can you fold a map? *Computational Geometry: Theory and Applications*, 29(1):23–46, September 2004. Special issue of selected papers from the 10th Annual Fall Workshop on Computational Geometry, 2000.
- [9] Marshall Bern and Barry Hayes. The complexity of flat origami. In *Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 175–183, Atlanta, January 1996. ACM-SIAM.
- [10] Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein, and Barry Hayes. A disk-packing algorithm for an origami magic trick. In *Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Science, Math, and Education (OSME 2001)*, pages 17–28, Monterey, California, March 9–11 2001.
- [11] Richard Courant and Herbert Robbins. *What is mathematics?* Oxford University Press, New York, 1941.

- [12] Erik D. Demaine. *Folding and Unfolding*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Waterloo, 2001.
- [13] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Anna Lubiw. Folding and cutting paper. In *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry (JCDCG'98)*, volume 1763 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 104–117, Tokyo, Japan, December 9–12 1998. (Shorter version in *Proceedings of the Japan Conference on Computational Geometry*, pages 5–9).
- [14] David Eppstein and Jeff Erickson. Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: applications of a data structure for finding pairwise interactions. In *Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 58–67, 1998.
- [15] Koji Fusimi. Trisection of angle by abe. *Saiensu supplement*, page 8, October 1980.
- [16] Martin Gardner. The combinatorics of paper folding. In *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, chapter 7, pages 60–73. W.H. Freeman and Company, 1983.
- [17] Thomas Hull. Origami geometric constructions.
<http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html>.
- [18] Thomas Hull. On the mathematics of flat origamis. *Congressus Numeratum*, 100:215–224, 1994.
- [19] Humiaki Huzita. Understanding geometry through origami axioms. In J. Smith, editor, *First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)* *First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*. British Origami Society, 1992.
- [20] Jacques Justin. Sem título. *British Origami*, page 30, 1986.
- [21] Kunihiko Kasahara and Toshie Takahama. *Origami for the connoisseur*. Japan Publications, first edition: march 1987; tenth printing: september 2004. edition, 1987. The original Japanese-language edition published by Sanrio Co., Ltd., Tokyo in 1985.
- [22] Toshikazu Kawasaki. On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami. In Humiaki Huzita, editor, *Origami Science and Technology*, pages 229–237. ?, 1989.
- [23] T. Kawazaki. On the relations of mountain-creases and valley-creases of a flat origami. In H.Huzita, editor, *Origami Science and Technology*, pages 229–237, 1990.
- [24] Hatori Koshiro. Origami constructions.
<http://origami.ousaan.com/library/conste.html>.
- [25] Hatori Koshiro. Origami page. <http://origami.ousaan.com/>.
- [26] Robert J. Lang. Origami page. <http://www.langorigami.com/>.

- [27] Robert J. Lang. A computational algorithm for origami design. In *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 98–105, Philadelphia, PA, 1996. ACM.
- [28] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. <http://www.langorigami.com/>, 2003.
- [29] Robert J. Lang. *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*. A K Peters, Printed in India at Replika Press, 2003.
- [30] David Lister. Two miscellaneous collections of jottings on the history of origami. <http://www.paperfolding.com/>.
- [31] Jun Maekawa. Viva origami! Sanrio Publications, 1982. in japanese.
- [32] Barry Hayes Marshall Bern. The complexity of flat origamis. In *7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 175–183, 1996.
- [33] David Mitchell. Origami heaven page. <http://www.origamiheaven.com/>.
- [34] Kan Chu Sen. *Wakoku Chiyekurabe (Mathematical Contests)*. 1721.
- [35] Paulo Eduardo Azevedo Silveira. Matemática e algoritmos sobre dobraduras. Projeto de mestrado, 2006.
- [36] Joseph Wu. Origami page. <http://www.origami.as/>.

