

MAC0499 - Trabalho de Formatura Supervisionado
Proposta para Monografia

\mathcal{S} -caminhos

Aluno: Marcio Takashi Iura Oshiro
Supervisor: José Coelho de Pina Jr.

Projeto de iniciação científica
parcialmente financiado pela FAPESP

1 Introdução

O tópico deste projeto de iniciação científica pertence a otimização combinatória que é um campo da matemática aplicada que usa técnicas de combinatória, programação matemática e teoria de algoritmos para resolver problemas em otimização sobre estruturas discretas.

Neste projeto estudamos o problema de encontrar uma coleção máxima de \mathcal{S} -caminhos disjuntos considerado por Mader. Se (V, E) é um grafo, T uma parte de V e \mathcal{S} uma partição de T , um \mathcal{S} -caminho é um caminho com pontas em partes distintas de \mathcal{S} .

Assim, o problema que consideramos é formulado da maneira mostrada abaixo.

Problema $\text{MADER}(V, E, \mathcal{S})$: Dado um grafo (V, E) e uma partição \mathcal{S} de uma parte de V , encontrar uma coleção máxima de \mathcal{S} -caminhos disjuntos.

Mader [6] obteve uma fórmula min-max para o número máximo de \mathcal{S} -caminhos disjuntos e Schrijver [7] apresentou uma demonstração extremamente curta para essa fórmula. Essa fórmula tem como conseqüências as fórmulas de Tutte-Berge para o número máximo de arestas em um emparelhamento, de Menger para o número máximo de RS -caminhos disjuntos em um grafo e de Gallai para o número máximo de T -caminhos disjuntos em um grafo.

Até poucos anos atrás, o único algoritmo eficiente conhecido para encontrar uma coleção máxima de \mathcal{S} -caminhos disjuntos havia sido obtido por Lovász através de uma redução ao *linear matroid matching* [4]. Em 2004, Chudnovsky, Geelen, Gerards, Goddyn, Lohman e Seymour [2] apresentaram uma fórmula min-max que generalizou a de Mader e logo

em seguida Chudnovsky, Cunningham e Geelen [1] obtiveram um algoritmo baseado na estrutura dessa nova fórmula e de idéias apresentadas no livro *Matching Theory* de Lovász e Plummer [5].

2 Objetivos

Neste projeto o foco será o estudo de diversos problemas clássicos relacionados ao problema MADER. Entre tais problemas destacamos o de encontrar emparelhamento máximo, empacotamento de RS -caminhos e de T -caminhos. Será dado maior ênfase nos problemas envolvendo emparelhamentos.

Além dos problemas mencionados anteriormente, estudaremos tópicos de combinatória poliédrica. Combinatória poliédrica trata das aplicações de métodos de programação linear, especialmente dualidade, à resolução de problemas em otimização combinatória.

Pretendemos descrever em um só texto as fórmulas min-max de Mader (\mathcal{S} -caminhos), de Gallai (T -caminhos), de Menger (RS -caminhos), Tutte-Berge (emparelhamentos), os teoremas de estrutura de Gallai-Edmonds (emparelhamentos) e Sebő e Szegő [9] (\mathcal{S} -caminhos) e o algoritmo de Edmonds para encontrar emparelhamentos máximos.

Devido a relação íntima entre o problema MADER e a teoria dos emparelhamentos, decidimos que o nosso guia nesse projeto será o livro *Matching Theory* de Lovász e Plummer [5]. Este é um livro fascinante onde muitas das técnicas em otimização combinatória são apresentadas usando como “plano de fundo” a teoria dos emparelhamentos. Para tópicos mais recentes consultaremos o capítulo 73 de Schrijver [8] e o artigo de Sebő e Szegő [9].

3 Atividades já realizadas

Comecei estudando a teoria dos emparelhamentos através do livro de Lovász [5]. Para entender melhor alguns teoremas usei o livro de teoria dos grafos de Diestel [3] como apoio.

Lendo o primeiro capítulo do livro de Lovász [5] aprendi alguns resultados fundamentais na teoria dos emparelhamentos, como os teoremas de König, Hall e Frobenius. O teorema de König é considerado um dos mais importantes na teoria dos emparelhamentos. Ele relaciona o número de arestas em um emparelhamento máximo com o número de vértices em uma cobertura por vértices mínima em um grafo bipartido.

Em seguida estudei o teorema de Berge que caracteriza um emparelhamento máximo através do conceito de caminhos alternantes. A idéia dos caminhos alternantes é muito usada na teoria dos emparelhamentos. Um exemplo disso é o algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos conhecido como método húngaro.

Outro problema visto foi o do sistema de representantes distintos, que apesar de ser um problema de teoria dos conjuntos é facilmente traduzido para a linguagem de grafos e resolvido pelo teorema de Hall.

Estudei alguns resultados clássicos relacionados à emparelhamentos máximos e perfeitos, tais como o teorema de Tutte que caracteriza grafos com emparelhamentos perfeitos, o lema de Gallai que dá uma condição suficiente para um grafo ser fator-crítico e a fórmula de Berge para cálculo da deficiência de um grafo. Outro tópico importante estudado foi o teorema da estrutura de Gallai-Edmonds.

Atualmente estou estudando barreiras, que são conjuntos de vértices que geram o máximo na fórmula de Berge.

4 Cronograma para o segundo semestre

As atividades planejadas para o segundo semestre são:

1. Estudar emparelhamentos no contexto de programação linear (capítulo 7 [5]);
2. Estudar algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos (capítulo 9 [5]);
3. Estudar emparelhamento de matróides (capítulo 11 [5]);
4. Estudar os artigos de Schrijver [7] e Sebő e Szegő [9];
5. Preparar o pôster e a apresentação do trabalho;
6. Redigir o texto da monografia e revisá-lo.

O cronograma para as atividades planejadas segue abaixo:

Atividade	JUL	AGO	SET	OUT	NOV
1	✓				
2	✓	✓			
3		✓	✓	✓	
4				✓	✓
5				✓	✓
6	✓	✓	✓	✓	✓

5 Estrutura esperada da monografia

Pretendo começar a parte técnica descrevendo o que são emparelhamentos em grafos, explicando o problema de encontrar um emparelhamento máximo e apresentando resultados importantes como o teorema de König, de Hall, de Tutte, de Tutte-Berge e a estrutura de Gallai-Edmonds.

Explicarei brevemente o problema de empacotamento de RS -caminhos e o teorema de Menger que dá uma fórmula min-max para o número máximo de RS -caminhos disjuntos. O mesmo será feito com o problema de empacotamento de T -caminhos e o teorema de Gallai que dá uma fórmula min-max para o número máximo de T -caminhos disjuntos.

Em seguida descreverei o problema de empacotamento de \mathcal{S} -caminhos. Assim como nos problemas anteriores, o teorema de Mader dá uma fórmula min-max para o número de \mathcal{S} -caminhos disjuntos. Terminarei explicando a estrutura de Sebő e Szegő e mostrando como particularizar a fórmula de Mader para a de Tutte-Berge, Menger e Gallai.

A estrutura esperada da monografia será a seguinte:

- Introdução
- Parte técnica
 - Emparelhamentos
 - * Teorema de Tutte-Berge
 - * Estrutura de Gallai-Edmonds
 - Empacotamento de RS -caminhos
 - * Teorema de Menger
 - Empacotamento de T -caminhos
 - * Teorema de Gallai
 - Empacotamento de \mathcal{S} -caminhos
 - * Teorema de Mader
 - * Estrutura de Sebő e Szegő
 - * Particularizando o teorema de Mader
- Parte subjetiva
 - Desafios e frustrações
 - Relacionamento com o curso
 - Interação com o supervisor
 - Conclusões e observções

Referências

- [1] M. Chudnovsky, W.H. Cunningham e J. Geelen, *An algorithm for packing non-zero A-paths in group-labeled graphs*, Preprint, September 2004.
- [2] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman e P. Seymour, *Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs*, Preprint, October 2004.
- [3] R. Diestel, *Graph Theory : Electronic Edition*, Springer Verlag, 2005.
- [4] L. Lovász, Matroid matching and some applications, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **28** (1980), 208–236.
- [5] L. Lovász e M.D. Plummer, *Matching theory*, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, Noth-Holland, Budapest, 1986.
- [6] W. Mader, Über die Maximalzahl kantendisjunkter A-Wege, *Archiv der Mathematik (Basel)* **31** (1978), 387–402.
- [7] A. Schrijver, A short proof of Mader \mathcal{S} -paths theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **85** (2001), 319–321.
- [8] ———, *Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency*, Algorithms and Combinatorics, vol. 24, Springer, 2003.
- [9] A. Sebő e L. Szegő, The path-packing structure of graphs, *Proceedings of the 10th Integer Programming and Combinatorial Optimization (Berlin)* (D. Bienstock e G. Nemhauser, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3064, 2004, pp. 256–270.