$\mathcal{S}$-caminhos

Marcio Takashi Iura Oshiro (marcio.oshiro@gmail.com)
José Coelho de Pina (coelho@ime.usp.br)
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

Breve histórico

Emparelhamento é uma área clássica em teoria dos grafos e teve um papel catalítico nos últimos 100 anos, sendo responsável pelo desenvolvimento de muitos métodos combinatórios novos e mais gerais.

Considera-se que os precursores dessa área foram Petersen, estudando fatoração de grafos, e Kőnig, estudando grafos bipartidos.

Uma das contribuições de Petersen à teoria dos grafos foi em 1898, quando ele apresentou um grafo cúbico não-planar sem pontes e que não podia ser decomposto em 3 emparelhamentos perfeitos disjuntos. Esse grafo, chamado de "grafo de Petersen" é um dos mais famosos que existem e tem servido como contra-exemplo para diversas conjecturas.

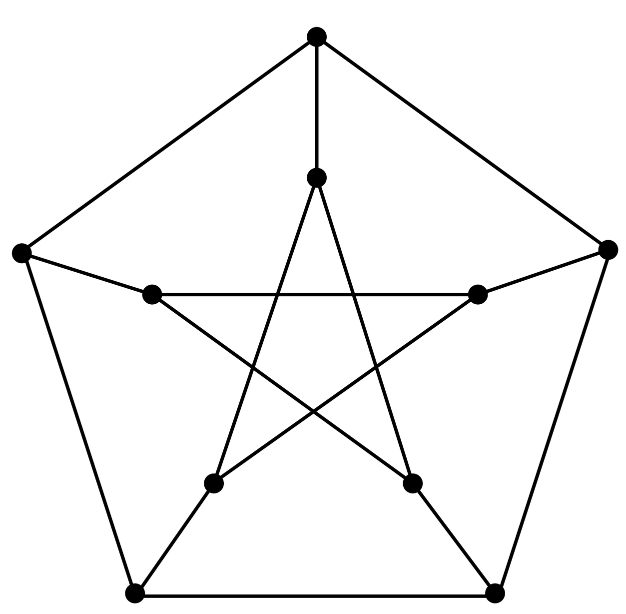

Figura 1: *Grafo de Petersen.*

O resultado mais conhecido de Kőnig sobre emparelhamentos é uma relação min-max dizendo que, em um grafo bipartido, o número máximo de arestas em um emparelhamento é igual ao número mínimo de vértices em uma cobertura.

A importância das relações min-max é devido a estas serem freqüentemente utilizadas como critério de parada e certificado de correção de vários algoritmos

O primeiro algoritmo para achar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos foi dado em 1930 por Kőnig e Egerváry. Em 1955, Kuhn apresentou o chamado "método húngaro" para achar emparelhamentos perfeitos de peso máximo (ou mínimo) em grafos bipartidos. Para grafos arbitrários o primeiro algoritmo eficiente foi dado por Edmonds em 1965.

Emparelhamentos

Um emparelhamento é um conjunto de arestas que não possuem pontas em comum.

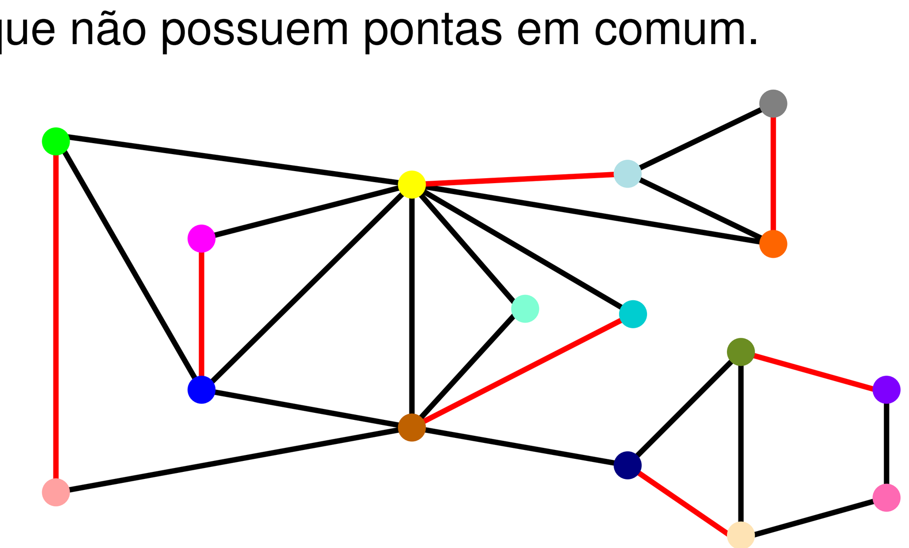

Figura 2: *Um emparelhamento máximo.*

Problema do emparelhamento máximo:

> dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar um emparelhamento com o maior número possível de arestas.

Se $\mathcal{P}$ é um emparelhamento e $U_0 \subseteq V$, então temos que $|\mathcal{P}|$ não é maior que

$$c(U_0) := |U_0| + \sum_i \left\lfloor \frac{|U_i|}{2} \right\rfloor,$$

onde os U_i são os componentes de $G - U_0$. Berge provou a seguinte relação min-max: se $|\mathcal{P}|$ for máximo e $c(U_0)$ for mínimo, então eles são iguais.

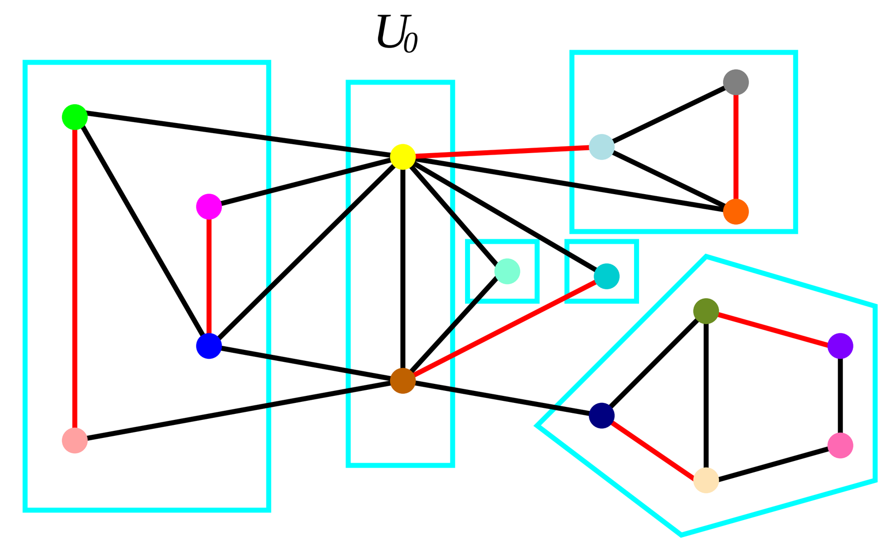

Figura 3: *Toda aresta de $\mathcal{P}$ tem um vértice em U_0, ou está em um componente de $G - U_0$.*

RS-caminhos

Sejam R e S subconjuntos disjuntos dos vértices do grafo. Um RS-caminho é um caminho com uma ponta em R e a outra em S.

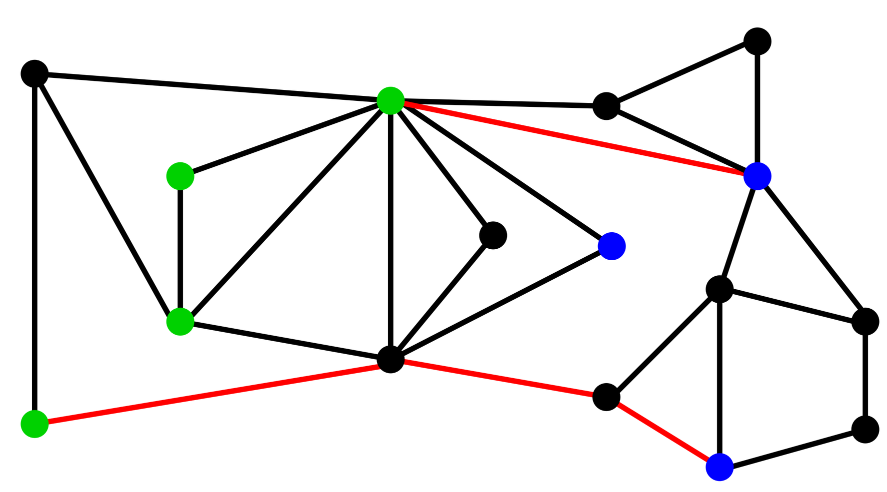

Figura 4: *Vértices de R são verdes e de S são azuis.*

Problema dos RS-caminhos:

> dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos nos vértices.

Uma relação min-max para este caso, provada por Menger, é que o tamanho de uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos é igual ao número mínimo de vértices que intersectam todos os RS-caminhos no grafo.

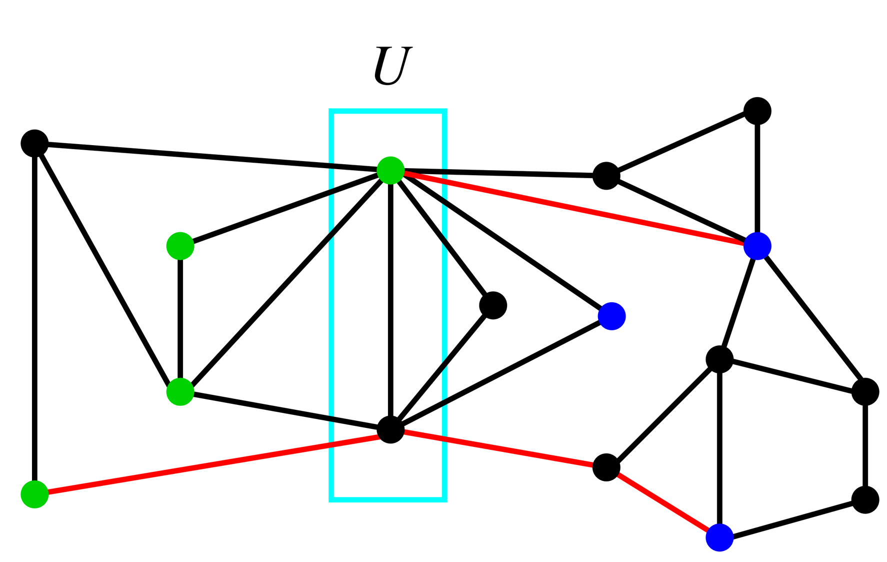

Figura 5: *U intersecta todo RS-caminho.*

Generalizando emparelhamentos

Considere subconjuntos T de vértices do grafo. Um T-caminho é um caminho com pontas em vértices distintos de T.

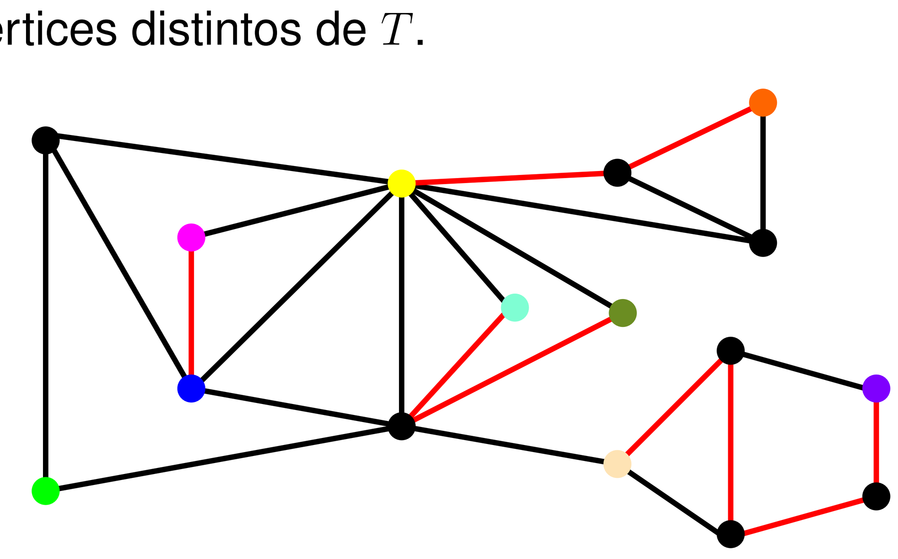

Figura 6: *Vértices coloridos são vértices de T.*

Problema dos T-caminhos:

> dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos nos vértices.

Se T contém todos os vértices do grafo, então o problema acima é essencialmente o do emparelhamento máximo.

Se $\mathcal{P}$ é uma coleção de T-caminhos e $U_0 \subseteq V$, então temos que $|\mathcal{P}|$ não é maior que

$$c(U_0) := |U_0| + \sum_i \left\lfloor \frac{|U_i \cap T|}{2} \right\rfloor,$$

onde os U_i são os componentes de $G - U_0$. Gallai provou a seguinte relação min-max: se $|\mathcal{P}|$ for máximo e $c(U_0)$ for mínimo, então eles são iguais.

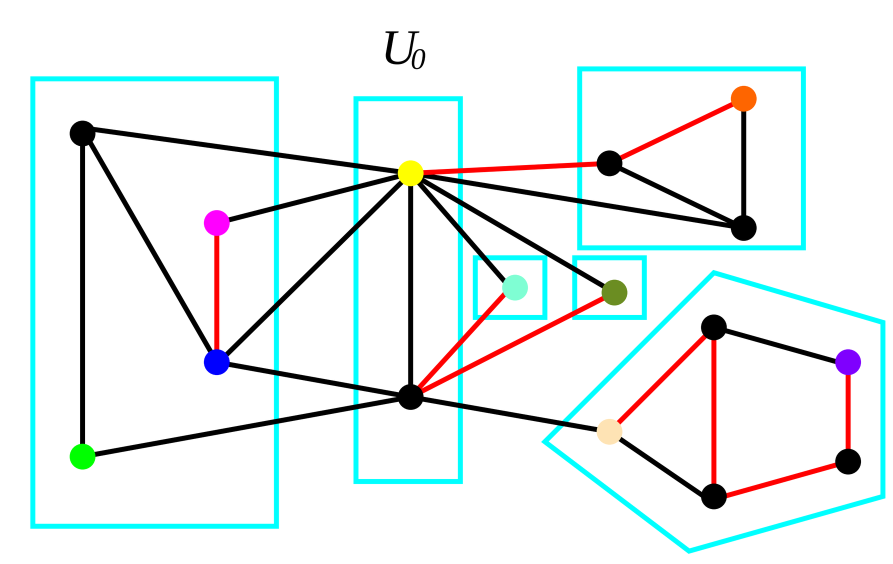

Figura 7: *Todo T-caminho tem um vértice em U_0, ou está em um componente de $G - U_0$.*

Generalizando ainda mais

Agora considere subconjuntos T de vértices do grafo e uma partição $\mathcal{S}$ de T. Um $\mathcal{S}$-caminho é um caminho com pontas em partes distintas de $\mathcal{S}$.

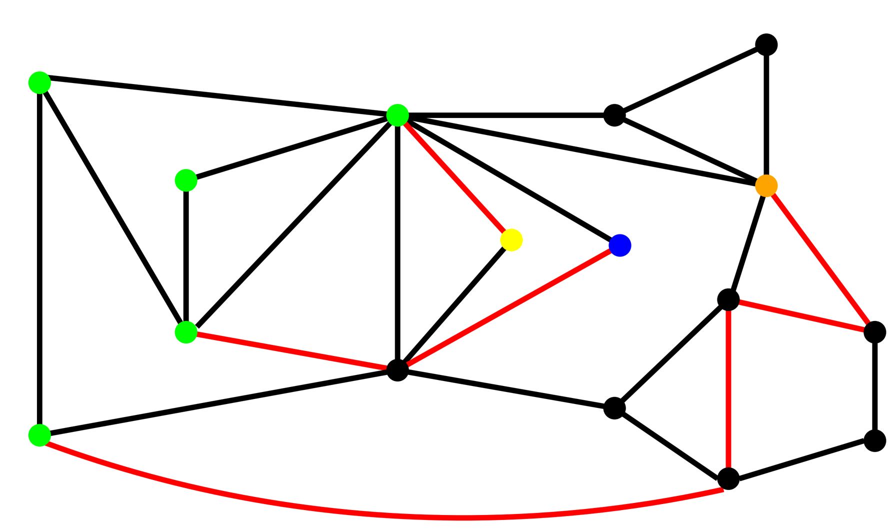

Figura 8: *Os vértices coloridos são vértices de T e cada cor representa uma parte de $\mathcal{S}$.*

Problema dos $\mathcal{S}$-caminhos:

> dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos nos vértices.

Se os elementos de $\mathcal{S}$ são os conjuntos unitários dos vértices de T, então o problema acima é essencialmente o problema dos T-caminhos.

Se $\mathcal{S} = \{R, S\}$, então o problema acima é essencialmente o problema dos RS-caminhos.

Mader provou, para $\mathcal{S}$-caminhos, uma relação min-max que generaliza as anteriores.

Até recentemente, não existia algoritmo combinatório eficiente para encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Em 2004, Chudnovsky, Geelen, Gerards, Goddyn, Lohman e Seymour apresentaram uma fórmula min-max que generalizou a de Mader e logo em seguida Chudnovsky, Cunningham e Geelen obtiveram um algoritmo baseado na estrutura dessa nova fórmula e de idéias apresentadas por Lovász e Plummer.

Projeto de iniciação científica parcialmente financiado pela FAPESP (proc. 06/54065-2).