Cotas Construtivas para Números de Ramsey fora da Diagonal

Domingos Dellamonica Junior

ddj@ime.usp.br

Departamento de Ciência da Computação - IME.USP

Números de Ramsey

Número de Ramsey $R(m, s)$: menor N tal que todo grafo com N vértices possui um clique de tamanho s ou um conjunto independente de tamanho m.

Ramsey (1930): para todo m e s dados, $R(m, s)$ está bem definido (é finito).

Cotas para números de Ramsey

- método probabilístico: cotas para números de Ramsey;
- construções explícitas de grafos: cotas inferiores para números de Ramsey fora da diagonal ($m \gg s$).

Obs.: $R(m, s) = R(s, m)$ para todo m e s.

Método Probabilístico

Métodos Probabilísticos: técnicas não-construtivas que demonstram a existência dos objetos procurados. Idéia: estabelecer um espaço de probabilidade e provar que, com probabilidade positiva, um objeto escolhido aleatoriamente neste espaço possui as propriedades desejadas.

Referências clássicas: *The Probabilistic Method* [1] e *Probabilistic Methods in Combinatorics* [2].

Cotas Probabilísticas

- existe função $\alpha(m, s)$ com $\lim_{m\to\infty} \alpha(m, s) = 0$ tal que para todo $s \geq 3$,

$$R(m, s) \geq m^{(s-1-\alpha(m,s))/2}.$$

- existem constantes $c_s < 2 \cdot 20^{s-3}$ ($s \geq 3$) tais que se m é suficientemente grande,

$$R(m, s) < \frac{c_s m^{s-1}}{(\log m)^{s-2}}.$$

Cotas Construtivas

- Noga Alon e Pavel Pudlák [3]: construção explícita de grafos, fortemente baseada em corpos finitos.
  - ▷ Técnicas de álgebra linear, caracteres de grupos, probabilidades etc.
- N. Alon [4]: construções explícitas de grafos livres de triângulos que não possuem conjuntos independentes grandes.

Resultado Principal

Teorema 1. *Existe uma construção explícita de grafos da qual decorre que, para todo m suficientemente grande e todo s, temos $R(m,s) \geq m^{\varepsilon\sqrt{\log s/\log\log s}}$, onde $\varepsilon > 0$ é uma constante absoluta.*

Obs.: Compare com a cota probabilística: $R(m,s) \geq m^{(s-1-\alpha(m,s))/2}$.

Grafos Norma

Definição 1. *Sejam q uma potência de um primo, $t > 1$ e $N(x) = x^{(q^t-1)/(q-1)}$ $(x \in \mathrm{GF}_{q^t})$ [norma de GF_{q^t} sobre GF_q].* Grafo norma $\mathrm{NG}_{q,t}$:

- *conjunto de vértices* $= \mathrm{GF}_{q^t}$
- a, b *ligados por aresta se e somente se* $N(a+b) = 1$

Permitimos laços: se $N(2a) = 1$, há um laço em a.

Grafo de Cliques

Definição 2. *Seja G um grafo.* Grafo de Cliques de G, $\mathrm{CQ}(G)$*:*

- *vértices = conjunto de cliques de G de tamanho pelo menos 2.*
- *K, L ligados por aresta se e somente se existe $\{u, v\} \in E_G$* com *$u \in K \setminus L$* e *$v \in L \setminus K$.*

Definimos $\mathrm{CQ}_k(G)$ como o grafo de k- cliques de G.

O grafo de Ramsey construído é $\mathrm{CQ}_k(\mathrm{NG}_{q,t})$ para valores de k, q, t a serem definidos.

Propriedades do Grafo de Cliques

- $\alpha(G)$: tamanho do maior cj. independente do grafo G. Para todo k, temos $\alpha(\mathrm{CQ}_k(G)) \leq \alpha(G)$.
  Prova combinatória: mapa explícito entre conjuntos independentes dos grafos.
- Se $\mathrm{CQ}_k(G)$ possui um clique de tamanho $> k!(l-1)^k$ então G possui um subconjunto de kl vértices com $\binom{l}{2}$ arestas.

Propriedades dos Grafos Norma

- O número de vértices de $\mathrm{NG}_{q,t}$ é $n = q^t$.
- O grafo é d-regular, onde $d = (q^t - 1)/(q - 1)$.
- $\mathrm{NG}_{q,t}$ não contém um $K_{t,t!+1}$. São utilizadas técnicas de geometria algébrica para provar este resultado.

Propriedades dos Grafos Norma

- O maior auto-valor do grafo é d (isto vale para todo grafo d-regular).
- Todos os demais auto-valores são limitados por $q^{t/2}(q-2)/(q-1) < \sqrt{n}$.
  Dem.: cota de Weil para soma de caracteres.

Propriedades dos Grafos Norma

- $\alpha(\mathrm{NG}_{q,t}) = O(n^{1/2+1/t})$ (omitindo os laços de $\mathrm{NG}_{q,t}$). Segue da relação entre auto-valores do grafo e o número de arestas que tem pontas em dois conjuntos de vértices.

Propriedades dos Grafos Norma

- Para cada $k \leq \lceil t/2 \rceil$, o número de cliques de tamanho k em $\mathrm{NG}_{q,t}$ é assintoticamente

$$\frac{1}{k!} n^{k - \binom{k}{2}/t}.$$

Dem.: indução finita, técnicas probabilísticas.

Obs.: Tomando $k = \lceil t/2 \rceil$, o nr. de cliques é $n^{3t/8}$ (com q e t bem grandes).

Esboço da Demonstração

As várias partes do artigo se integram:

- Fato: Se um grafo tem um número "grande" de arestas, ele contém um $K_{t,t!+1}$.
- $\mathrm{CQ}_k(G)$ contém um clique grande somente se G tem uma região densa (muitas arestas).
- $\mathrm{NG}_{q,t}$ não contém $K_{t,t!+1}$ e então $\mathrm{CQ}_k(\mathrm{NG}_{q,t})$ não tem um clique grande.
- $\alpha(\mathrm{CQ}_k(\mathrm{NG}_{q,t})) \leq \alpha(\mathrm{NG}_{q,t}) = O(n^{1/2+1/t})$.

Técnicas Utilizadas

Estimação de auto-valores

1. Cada caractere χ do grupo aditivo de $\mathrm{GF}(q^t)$ induz um vetor $\boldsymbol{\chi} = (\chi(a))_{a\in\mathrm{GF}(q^t)}$.
2. Prova-se que $\boldsymbol{\chi}$ é auto-vetor de A^2, onde A é a matriz de adjacência do grafo.
3. Há precisamente q^t caracteres LI formando uma base de auto-vetores para A^2.
4. Aplicamos a cota de Weil para soma de caracteres para limitar os auto-valores.

Técnicas Utilizadas

Auto-valores fornecem dois resultados:

- Sejam B, C conjuntos de vértices. $e_{B,C}$: # de arestas com uma ponta em B e a outra em C.

  $$\left| e_{B,C} - \frac{d}{n}|B||C| \right| \leq \lambda \sqrt{|B||C|},$$

  λ: segundo maior auto-valor.

- *Pseudo-aleatoriedade* do grafo é relacionada com λ.

Técnicas Utilizadas

Cota para $e_{B,B}$ nos fornece limitante superior para $\alpha(\mathrm{NG}_{q,t})$.

Probabilidade e esperança usada para estimar número de k-cliques de $\mathrm{NG}_{q,t}$: grafo é pseudo-aleatório.

Construção Livre de Triângulos

- Uma construção algébrica é usada (Grafo de Cayley). Garantia de um grafo livre de triângulos.
- Auto-valores são estimados usando resultados de teoria dos códigos.
- A função ϑ de Lovász é usada junto aos auto-valores para limitar o número de independência do grafo.

Referências

[1] N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*. New York: John Wiley and Sons, 2nd ed., 2000.

[2] P. Erdös and J. Spencer, *Probabilistic Methods in Combinatorics*. Academic Press, 1974.

[3] N. Alon and P. Pudlák, "Constructive lower bounds for off-diagonal Ramsey numbers," *Israel J. Math.*, no. 122, pp. 243–251, 2001.

[4] N. Alon, "Explicit Ramsey graphs and orthonormal labelings," *The Electronic J. Combinatorics 1*, no. R12, 1994.

[5] W. M. Schmidt, *Equations over Finite Fields*. Springer-Verlag, 1976.

[6] B. Bollobás, *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2nd ed., 2001.

[7] L. Lovász, "On the Shannon capacity of a graph," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 1, 1979.