

*PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA*  
**TÉCNICAS PROBABILÍSTICAS E ALGÉBRICAS EM  
COMBINATÓRIA**

DOMINGOS DELLAMONICA JR E YOSHIHARU KOHAYAKAWA

RESUMO. Este é um projeto de pesquisa para a iniciação científica de Domingos Dellamonica Júnior, a ser desenvolvido sob a supervisão de Y. Kohayakawa, no Instituto de Matemática e Estatística, USP. O objetivo principal deste projeto é a investigação de problemas combinatórios através de métodos probabilísticos e algébricos.

### 1. INTRODUÇÃO

Este projeto tem como base literatura bem conhecida na área de combinatória: o livro *The Probabilistic Method*, de Alon e Spencer [5], as notas *Linear Algebra Methods in Combinatorics, with Applications to Geometry and Computer Science (Preliminary Version 2)*, de Babai e Frankl [6], e o capítulo *Tools from Higher Algebra* do *Handbook of Combinatorics* [7], de Alon [1]. Além do estudo de parte substancial desta literatura, o candidato lerá dois trabalhos de Alon e Pudlák [3, 4], como ilustrações exemplares dos métodos que ele aprenderá ao longo deste projeto.

Ao final deste projeto, o candidato terá uma formação sólida em certos aspectos da combinatória contemporânea, e terá tido, inclusive, oportunidade de pensar em alguns problemas de pesquisa atuais.

### 2. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O objetivo deste projeto é preparar o nosso aluno de iniciação científica na área de combinatória, dando-lhe uma formação sólida para o seu programa de mestrado, em que ele ingressará em 2005.

Como mencionado na introdução, este projeto é centrado em combinatória, com especial ênfase na aplicação de métodos probabilísticos e de técnicas algébricas. O curso de graduação do candidato, o Bacharelado em Ciência da Computação (BCC) do IME/USP, contempla em seu currículo disciplinas obrigatórias em que o estudo de certos aspectos da combinatória é importante, como por exemplo *Algoritmos em Grafos* e *Análise de Algoritmos*. Estas disciplinas têm ênfase em aspectos algorítmicos. Além dessas disciplinas, o aluno tem contato com vários aspectos da combinatória e da teoria dos grafos em disciplinas optativas. Entretanto, face à riqueza da combinatória moderna, justifica-se um estudo mais aprofundado mesmo neste nível de formação do aluno.

O interesse deste candidato pela área de combinatória foi reforçado ao cursar com este orientador a disciplina *Tópicos de Matemática Discreta*, oferecida no 2o. semestre de 2004. Acreditamos que este projeto dará uma formação sistemática ao nosso aluno em certos aspectos da combinatória, e assim ele poderá iniciar a pesquisa em seu programa de mestrado sem demora.

### 3. TÓPICOS ESPECÍFICOS DE PESQUISA

Listamos a seguir os tópicos específicos que o candidato estudará sob este projeto. Organizamos o material de acordo com a bibliografia fundamental, a saber, Alon e Spencer [5], Babai e Frankl [6], e Alon [1].

3.1. *The Probabilistic Method*. Deste livro, basicamente cobriremos:

1. *Capítulos 1 a 4* (fundamentos e técnicas básicas): parte deste material será revisão e certas aplicações mais técnicas serão omitidas.
2. *Capítulos 5 a 9* (o Lema Local, desigualdades exponenciais, pseudoaleatoriedade): aplicações ilustrativas serão estudadas (vários aspectos técnicos serão omitidos).
3. *Capítulo 10 a 13* (grafos aleatórios, discrepância, geometria): resultados ilustrativos destes tópicos serão estudados.

3.2. *Linear Algebra Methods in Combinatorics*. Observamos que o candidato obteve familiaridade com a teoria extremal dos conjuntos ao cursar a disciplina *Tópicos de Matemática Discreta*, em 2004. Algumas aulas daquela disciplina foram baseadas nestas notas de Babai e Frankl. Dentro deste projeto, o candidato complementarará seus conhecimentos nesta direção, estudando:

1. *Capítulos 1 a 3* (fundamentos): revisão de álgebra abstrata, combinatória, e convexidade (este material será coberto de forma muito breve).
2. *Capítulos 4 e 5* (sistemas de conjuntos): aplicações de técnicas da álgebra linear e álgebra de polinômios à teoria extremal dos conjuntos, conseqüências geométricas (parte deste material já é conhecido pelo candidato).
3. *Capítulos 6 e 7* (aplicações da álgebra multilinear e outros): sistemas de pares de conjuntos (teoremas de Bollobás, Frankl, e Lovász).

Uma referência auxiliar para esta área será Jukna [8].

3.3. *Tools from Higher Algebra*. O candidato estudará fração substancial desta resenha, mas claramente vários dos resultados algébricos necessários têm demonstrações que estão muito além de uma iniciação científica (por exemplo, estimativas para somas de caracteres, como a de Weil). Portanto, ênfase será dada nas aplicações de resultados algébricos mais elementares. Outra referência nesta linha a ser consultada é [2].

**3.4. Metodologia de estudo.** Este projeto terá como componente central o estudo de literatura sofisticada: as referências [1], [5], [6] têm como público alvo alunos de pós-graduação e pesquisadores da área. Acreditamos que este candidato terá a perseverança e o entusiasmo necessários para aproveitar esta leitura, especialmente havendo assistência de alguém familiarizado com esta bibliografia. Ao final deste projeto, o candidato terá adquirido conhecimento não só de vários resultados modernos da combinatória, mas de *métodos* que têm provado sua aplicabilidade em contextos diversos da combinatória, teoria dos grafos, teoria da computação, dentre outros.

Observamos que também planejamos a leitura de [3, 4]. Acreditamos assim que o candidato terá sempre em mente alguns problemas concretos nos quais ele poderá tentar aplicar os métodos que ele aprenderá ao longo do ano. Estes dois trabalhos são excelentes exemplos em que métodos algébricos, probabilísticos, e puramente combinatórios se mesclam. Os problemas estudados em [3, 4] permitem variantes e já são interessantes em casos específicos, e assim há também espaço para o candidato tentar explorar alguns pequenos problemas em aberto, adequados para um projeto de IC.

#### 4. O CANDIDATO

O candidato à bolsa estará cursando o 4o. e último ano do BCC em 2004. Ele planeja ingressar na pós-graduação em 2005; no momento, ele está certo de que escolherá a área de combinatória para o seu mestrado.

**4.1. Olimpíada Brasileira de Matemática, Nível Universitário.** O candidato participou da Olimpíada Brasileira de Matemática, Nível Universitário, em 2004, e obteve *Menção Honrosa*. É interessante que ele não é participante regular destas olimpíadas, e que ele não se preparou especificamente para esta competição. Para este orientador, esta menção parece ser outra evidência do potencial deste candidato para a pesquisa em áreas como a combinatória.

#### 5. CRONOGRAMA E PLANO DE TRABALHO

- Primeiro semestre de 2004: o candidato cursará 6 disciplinas de seu bacharelado (além de uma disciplina “fora de área”), que corresponde à carga horária usual. Dentre estas disciplinas, destacam-se *Álgebra III* (teoria de Galois), *Algoritmos e Complexidade de Computação*, e *Algoritmos de Aproximação*. Neste semestre, ele estudará principalmente os tópicos delineados nas Seções 3.1 e 3.2.
- Segundo semestre de 2004: neste semestre, o candidato estudará os tópicos avançados das Seções 3.1 e 3.2, e também estudará os tópicos mais elementares do *Tools from Higher Algebra*. O candidato cursará até 2 disciplinas da pós-graduação (caso disciplinas de interesse sejam oferecidas), além das disciplinas da graduação. Isto será possível, pois a carga da graduação será pequena (basicamente duas disciplinas: 3 créditos “fora de área” e “trabalho de formatura” (MAC0499)).

- Ao longo do ano, o candidato estudará os trabalhos de Alon e Pudlák [3] e [4]. Embora melhoramentos substanciais dos resultados destes autores não seria realista esperar de um trabalho de IC, acreditamos que alguns casos pequenos (ou variantes) podem ser explorados com sucesso, levando possivelmente a resultados novos relevantes.

#### REFERÊNCIAS

1. Noga Alon, *Tools from higher algebra*, Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2, Elsevier, Amsterdam, 1995, pp. 1749–1783. MR **97a**:05004
2. ———, *Combinatorial Nullstellensatz*, Combin. Probab. Comput. **8** (1999), no. 1-2, 7–29, Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995). MR **2000b**:05001
3. Noga Alon and Pavel Pudlák, *Constructive lower bounds for off-diagonal Ramsey numbers*, Israel J. Math. **122** (2001), 243–251. MR **2002e**:05144
4. ———, *Equilateral sets in  $l_p^n$* , Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 3, 467–482. MR 1995 795
5. Noga Alon and Joel H. Spencer, *The probabilistic method*, second ed., Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, With an appendix on the life and work of Paul Erdős. MR **2003f**:60003
6. László Babai and Peter Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics, with applications to geometry and computer science (Preliminary version 2)*, 1992, University of Chicago.
7. R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász (eds.), *Handbook of combinatorics. Vol. 1, 2*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995. MR **96h**:05001
8. Stasys Jukna, *Extremal combinatorics*, Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer-Verlag, Berlin, 2001, With applications in computer science. MR **2003g**:05001

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO 1010, 05508–900 SÃO PAULO, SP

Endereços Eletrônicos: [yoshi@ime.usp.br](mailto:yoshi@ime.usp.br), [domingos@linux.ime.usp.br](mailto:domingos@linux.ime.usp.br)