Teorema de Erdős Ko Rado

Domingos Dellamonica Jr.

4 de maio de 2004

Resumo

Esta é uma adaptação de um paper de Peter J. Cameron ¹ apresentando uma demonstração para um dos principais resultados da Teoria Extremal de Conjuntos.

Algumas Definições

Um automorfismo num grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \mapsto V$, bijetora, que preserva arestas, ou seja, $(u, v) \in E, (f(u), f(v)) \in E$.

Um grafo G é dito vértice-transitivo se, para quaisquer vértices x e y de G , exista um automorfismo g com $g(x) = y$.

Se X é um conjunto de vértices e g uma função definida para todo elemento de X , convencionamos que $X^g = \{g(x) : x \in X\}$.

Lema sobre Grafos Vértice-Transitivos

Seja $G = (X, E)$ um grafo vértice-transitivo. Seja $Y \subset X$ tal que todo clique em Y tem tamanho máximo $|Y|/m$. Então, qualquer clique em G tem tamanho máximo $|X|/m$. Um clique C atingindo tal limite satisfaz $|C^g \cap Y| = |Y|/m$ para todo automorfismo g de G .

Demonstração Seja N a ordem do grupo de automorfismos de G . Dados $x, y \in X$, o número de automorfismos satisfazendo $g(x) = y$ é $N/|X|$.

Note que para todo $z \in X$ existe um automorfismo π , com $\pi(y) = z$. Sendo assim, se $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ são tais que $\sigma_i(x) = y, i = 1, \dots, r$, então $\pi\sigma_i(x) = z, i = 1, \dots, r$ são r automorfismos distintos (teoria dos Grupos) que levam x a z . Por simetria, vemos que o número de automorfismos que levam x a qualquer elemento de X deve ser o mesmo, $N/|X|$.

Suponha que C seja um clique no grafo. Vamos agora contar os pares x, g onde x é um vértice em C e g um automorfismo tal que $g(x) \in Y$. Há $|C|$ escolhas para o vértice x e $N/|X|$ possíveis automorfismos g com $g(x) = y$ para todo $y \in Y$. O número de pares é, portanto, $|C||Y|N/|X|$.

¹Obtido na Web em <http://www.maths.qmw.ac.uk/~pjc/comb/>.

Podemos contar os mesmos pares por outra perspectiva. Para cada um dos N automorfismos g , há no máximo $|Y|/m$ escolhas para $x \in X$. Para esta afirmação, veja que C^g é um clique e, como qualquer clique em Y tem tamanho máximo $|Y|/m$, $|C^g \cap Y| \leq |Y|/m$. Como g é uma bijeção, há no máximo $|Y|/m$ escolhas para $x \in X$.

Sendo assim, $|C||Y|N/|X| \leq N|Y|/m$. Simplificando, temos $|C| \leq |X|/m$, como no lema. Para o caso de um clique satisfazendo o limite, devemos ter $N|Y|/m$ pares x, g e, como vimos, isso só é possível se, para todo automorfismo g , tivermos $|C^g \cap Y| = |Y|/m$.

Demonstrando o Teorema

Seja $n \geq 2k$. Uma família intersectante de k -conjuntos de um n -conjunto tem cardinalidade máxima $\binom{n-1}{k-1}$.

Demonstração Considere o grafo $G = (X, E)$ cujos vértices são todos os k -conjuntos de um n -conjunto e as arestas ligam conjuntos que tem intersecção não vazia.

O grafo G é vértice-transitivo pois qualquer permutação do n -conjunto serve de automorfismo. Resta-nos mostrar que há uma família Y , de k -conjuntos, com $|Y| = n$, tal que qualquer sub-família intersectante de Y tem tamanho no máximo k . Se este é o caso, teremos encontrado um subconjunto de vértices do grafo que não possui nenhum clique (uma família intersectante é um clique) de tamanho maior que $(k/n)|Y|$. Pelo Lema, qualquer clique em G teria no máximo $(k/n)|X| = (k/n)\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ vértices.

Para facilitar a demonstração, tomaremos $\mathbb{Z}_n$ como n -conjunto, mas o resultado valerá para qualquer n -conjunto.

Considere $Y = \{Y_i = \{i, i+1, \dots, i+k-1\} : i \in \mathbb{Z}_n\}$. Vamos mostrar que em tal conjunto, não podemos escolher mais que k conjuntos intersectantes.

Fixe um conjunto escolhido inicialmente, digamos Y_0 . Como $n \geq 2k$, qualquer conjunto de Y que intercepte Y_0 deve ter como intersecção uma seqüência de inteiros (módulo n). Sendo assim, todos os conjuntos que interceptam Y_0 são $\{Y_{1-k}, \dots, Y_{-1}, Y_1, \dots, Y_{k-1}\}$.

Veja que os pares $\{(Y_{1-k}, Y_1), (Y_{2-k}, Y_2), \dots, (Y_{-1}, Y_{k-1})\}$ são formados por conjuntos disjuntos. Portanto, no máximo podemos escolher um elemento de cada par para formar uma família intersectante, ou seja, no máximo $k-1$ desses conjuntos podem, junto com Y_0 , formar uma família intersectante.

Além disso, caso $n > 2k$, é possível ver que a única maneira de conseguir k conjuntos intersectantes em Y é tomando conjuntos consecutivos, pois (Y_{i-k}, Y_{i+1}) e (Y_i, Y_{i+1-k}) , $i = 1, \dots, k-2$, também formam pares disjuntos.

Dessa forma, se escolhermos Y_1 , não poderemos escolher Y_{2-k} , devemos tomar Y_2 , analogamente, não podemos escolher Y_{3-k} e devemos tomar $Y_3 \dots$. A situação é a mesma se escolhermos primeiro Y_{1-k} .

Caso de Igualdade

Para $n = 2k$, podemos particionar todos os k -conjuntos em pares disjuntos. Tome um elemento de cada par e teremos uma família intersectante de tamanho

$$\frac{1}{2} \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{2(k!)^2} = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Para $n > 2k$, mostraremos que as únicas famílias intersectantes atingindo o tamanho máximo são do tipo $\mathcal{F}_j = \{S \subset \mathbb{Z}_n : |S| = k, j \in S\}$. No caso anterior, existe um número muito grande de famílias intersectantes possíveis (com tamanho máximo) e apenas n famílias do tipo $\mathcal{F}_j$, ou seja, a grande maioria das famílias não é do tipo $\mathcal{F}_j$.

Seja $\mathcal{F}$ uma família intersectante de tamanho máximo. Vamos começar com duas observações:

1. Suponha que existam x e y tais que todo k -conjunto contendo x e não contendo y pertence a $\mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ consiste de todos os k -conjuntos contendo x . Para ver isso, suponha que $L \in \mathcal{F}$ não contenha x , então existe um k -conjunto K , com $L \cap K = \emptyset$ que contem x mas não y (pois $|\mathbb{Z}_n - L| = n - k > k$), mas é impossível termos $K, L \in \mathcal{F}$.
2. Há dois k -conjuntos, K, K' , com $|K \cap K'| = k - 1$, com $K \in \mathcal{F}$ e $K' \notin \mathcal{F}$. Suponha que isso não seja verdade e sejam $\{a_i\}_{i=1}^n = \mathbb{Z}_n$ e $K_1 = \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathcal{F}$. Devemos ter $K_2 = \{a_2, \dots, a_{k+1}\} \in \mathcal{F}$ pois $|K_1 \cap K_2| = k - 1$. Continuando dessa mesma forma obteremos $K_{k+1} = \{a_{k+1}, \dots, a_{2k}\} \in \mathcal{F}$, mas $K_1 \cap K_{k+1} = \emptyset$.

Tome K, K' como em (2) e, sem perda de generalidade, assuma que $K = \{0, \dots, k - 1\}$ e $K' = \{1, \dots, k\}$. Por (1), podemos tomar $K'' \notin \mathcal{F}$ com $0 \in K''$ e $k \notin K''$, e também podemos assumir sem perda de generalidade que $K'' = \{l - k, \dots, 0, 1, \dots, l - 1\}$, com $1 \leq l < k$.

Pela caracterização de igualdade do lema, devemos ter k conjuntos intersectantes em Y e, como vimos acima, isso ocorre somente se tomarmos k conjuntos consecutivos.

Mas $Y_0 = K \in \mathcal{F}, Y_1 = K' \notin \mathcal{F}, Y_{l-k} = K'' \notin \mathcal{F}$, ou seja, é impossível tomar k conjuntos intersectantes em Y .