MAC 449 – Trabalho de Formatura Supervisionado

IME-USP – BCC, 2001 – Prof. responsável: Carlos Eduardo Ferreira

Monografia - Detalhes dos Tópicos Estudados

Aluno: Leo Kazuhiro Ueda
Supervisora: Nami Kobayashi

Projeto de Iniciação Científica
Autômatos Finitos: Algoritmos e Estruturas de Dados

10 de dezembro de 2001

Sumário

1 Minimização de Autômatos Finitos

Estudamos dois algoritmos para minimização de autômatos finitos determinísticos, a versão de David Gries para o algoritmo de John Hopcroft, com complexidade de tempo $O(|\Sigma| n \log n)$, e o algoritmo de Dominique Revuz para autômatos acíclicos, com complexidade $O(|\Sigma| n)$.

Começaremos com a definição do problema que queremos resolver, em seguida discutiremos os dois algoritmos.

1.1 Definição do Problema

Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um autômato finito determinístico.

Queremos um algoritmo que determine um autômato finito determinístico $\mathcal{B}$ com o menor número de estados e tal que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$. Tal autômato é denominado *minimal*.

Os métodos utilizados pelos dois algoritmos que apresentamos aqui se baseiam na seguinte definição de uma relação de equivalência sobre Q:

Definição 1.1 *Dois estados p e q são* equivalentes *se, e somente se, para todo $x \in \Sigma^*$, vale que $\delta(p, x) \in F \iff \delta(q, x) \in F$.*

De modo muito simplificado, a idéia é encontrar os estados equivalentes de $\mathcal{A}$. Mais especificamente, os algoritmos procuram pelas classes de equivalência em Q, conforme a relação definida acima. Sendo $[q]$ a classe de equivalência de $q \in Q$, o autômato $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ definido da seguinte forma é minimal:

- $Q' = \{[q] : q \in Q\}$;
- $\delta'([q], \sigma) = [\delta(q, \sigma)] \quad \forall q \in Q \ , \forall \sigma \in \Sigma$;
- $q_0' = [q_0]$;
- $F' = \{[q] : q \in F\}$.

1.2 O algoritmo de Hopcroft

Em [8], Hopcroft apresenta um algoritmo para minimizar o número de estados de um autômato finito determinístico, e afirma que ele tem complexidade de tempo $O(|\Sigma| n \log n)$.

Até aquele momento, os algoritmos conhecidos levavam tempo $O(|\Sigma| n^2)$, ou mais, no pior caso. Porém, a descrição do novo algoritmo e as suas provas de corretude e complexidade de tempo foram consideradas complicadas demais.

Por muitos anos, a despeito da importante melhora em relação aos algoritmos clássicos, o algoritmo de Hopcroft foi praticamente omitido de textos básicos sobre autômatos finitos. Alguns apenas descreviam o algoritmo, mas sem mostrar as provas de complexidade e corretude. Muitos dos textos básicos [9, 11] continuaram a apresentar somente os algoritmos $O(|\Sigma| n^2)$.

Com o objetivo de fornecer uma descrição mais clara, David Gries [7] re-descreve o algoritmo de Hopcroft, mas com uma pequena modificação. Apesar de ter cumprido seu objetivo, a descrição de Gries não se tornou muito popular.

Baseamos nosso estudo na descrição de Gries.

O algoritmo básico

Analisaremos o algoritmo básico de forma a facilitar o entendimento do algoritmo final.

Definição 1.2 *Uma* partição *dos estados de $\mathcal{A}$ em blocos $B_1, B_2, \cdots, B_p$ é* aceitável *quando é verdade que:*

(a) nenhum bloco contém, ao mesmo tempo, um estado final e um não final; e

(b) se p e q são estados equivalentes, então eles estão no mesmo bloco.

O algoritmo manterá uma partição de Q, que no início (ou final) de cada iteração é *aceitável*. Queremos que o algoritmo devolva uma partição onde dois estados p e q são equivalentes se e somente se eles estão no mesmo bloco. Os próximos dois lemas formalizam esse objetivo, mostrando a situação inicial e final do algoritmo.

Lema 1 *A partição $B_1 = F, B_2 = Q - F$ é aceitável.*

Lema 2 *Uma partição $B_1, B_2, \cdots, B_p$ é a partição que fornece as classes de equivalência em Q se e somente se:*

(a) a partição é aceitável; e

(b) para cada par de blocos B_i, B_j e cada símbolo $\sigma \in \Sigma$,

$$\forall p, q \in B_i\,, \quad \delta(p, \sigma) \in B_j \Rightarrow \delta(q, \sigma) \in B_j\ . \tag{1}$$

Em outras palavras, pensando no grafo $G(\mathcal{A})$, todos os arcos com rótulo σ que saem (dos vértices) de B_i devem chegar a (vértices de) um único bloco.

Portanto, podemos começar o algoritmo na situação do Lema 1 e fazer com que ele chegue à situação do Lema 2. O próximo lema descreve como fazer isso, refinando uma partição aceitável de uma maneira induzida pelas condições do Lema 2.

Lema 3 *Seja $B_1, B_2, \cdots, B_p$ uma partição aceitável. Suponha que existem dois blocos B_i e B_j, um símbolo σ e dois estados p e q tais que:*

$$p, q \in B_i\,, \quad \delta(p, \sigma) \in B_j \quad mas \quad \delta(q, \sigma) \notin B_j\ . \tag{2}$$

Então p e q não são estados equivalentes, e podemos obter uma nova partição aceitável substituindo B_i pelos blocos:

$$\overline{B_i} = \{s \in B_i : \delta(s, \sigma) \in B_j\} \quad e \quad \widetilde{B_i} = \{s \in B_i : \delta(s, \sigma) \notin B_j\}\ . \tag{3}$$

Essa substituição é na verdade uma *divisão* do bloco B_i em dois blocos. Considerando novamente $G(\mathcal{A})$, no bloco $\overline{B_i}$ todos os arcos com rótulo σ que saem dele chegam ao bloco B_j. Da mesma forma, no bloco $\widetilde{B_i}$, nenhum arco com rótulo σ chega ao bloco B_j. Note que esse é um refinamento do bloco B_i em direção ao nosso objetivo descrito no Lema 2. Chamaremos essa operação de *divisão do bloco B_i em relação ao par (B_j, σ)*, ou simplesmente *divisão de B_i em relação a (B_j, σ)*. Veja a Figura 1.

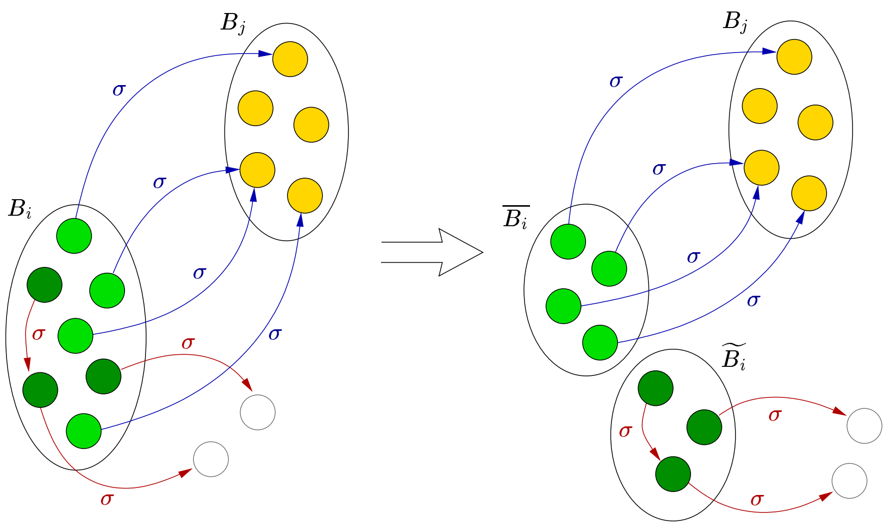


Figura 1: Exemplo de divisão do bloco B_i em relação ao par (B_j, σ).

Usando os lemas vistos até agora, podemos escrever o Algoritmo 4.

Algoritmo 4

$B_1 \leftarrow F$; $B_2 \leftarrow Q - F$;
enquanto $\exists\sigma, B_i, B_j$ tais que vale (2) **faça**
  divida B_i *em relação a* (B_j, σ);
fim. (4)

O algoritmo termina, pois a cada iteração um bloco é necessariamente adicionado na partição, e não podemos ter mais do que n blocos.

Os lemas também podem mostrar que no final da execução do algoritmo, a partição obtida é a desejada.

- Pré-condição: no início da execução temos uma partição aceitável (Lema 1);
- Invariante: após cada iteração, a partição continua sendo aceitável (Lema 3);
- Pós-condição: no final da execução, temos uma partição aceitável e nela não existem dois blocos B_i e B_j, um símbolo σ e dois estados p e q tais que vale (2). Pelo Lema 2, a partição fornece as classes de equivalência de Q.

Melhorias no algoritmo básico: lista L

Note que a ordem em que o Algoritmo (4) faz as operações de divisão de blocos não importa para a corretude. Então em cada iteração podemos determinar todas as divisões em relação a (B_j, σ) e depois executar todas essas divisões no mesmo passo. Com isso teremos o Algoritmo 5.

Algoritmo 5

$B_1 \leftarrow F$; $B_2 \leftarrow Q - F$;
enquanto $\exists \sigma, B_i, B_j$ tais que vale (2) **faça**
determine as divisões de todos o blocos *em relação a* (B_j, σ);
divida cada bloco conforme determinado;
fim. (5)

Esse algoritmo não é muito eficiente, já que para verificar a existência da tripla (σ, B_i, B_j) da condição do *enquanto*, precisamos testar todas as triplas (σ, B_i, B_j) existentes. Para esse teste somente, o algoritmo precisa fazer pelo menos $|\Sigma|n^2$ operações.

A estratégia para melhorar a complexidade é justamente reduzir o tempo gasto na verificação da condição do *enquanto*. Faremos isso mantendo uma lista L dos pares (B_j, σ) em relação aos quais sabemos que existem blocos B_i que precisam ser divididos. Veremos a seguir como é possível manter tal lista L.

Considere a seguinte observação:

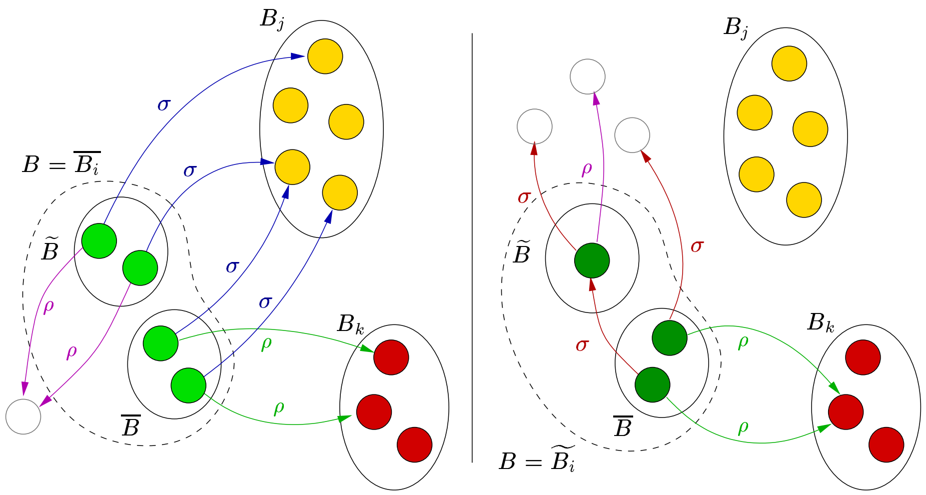
Após a divisão de todos blocos em relação a (B_j, σ)*, todos os blocos* B *da partição satisfazem* uma *das seguintes condições:*

$$\begin{array}{lll} (a) & \forall q \in B & \delta(q, \sigma) \in B_j\,, \quad ou \\ (b) & \forall q \in B & \delta(q, \sigma) \notin B_j\,. \end{array} \tag{6}$$

Ou seja, qualquer bloco B se encontrará na situação do bloco $\overline{B_i}$ ou do bloco $\widetilde{B_i}$ da Figura 1. Isso nos leva ao seguinte lema:

Lema 4 *Suponha que todos os blocos foram divididos em relação a* (B_j, σ)*. Então não será preciso dividir mais nenhum bloco em relação a* (B_j, σ)*.*

Com isso concluímos que um par (B_j, σ) só precisa entrar na lista L no máximo uma vez. Veja a Figura 2.



Divisão do bloco $B = \overline{B_i}$ em relação a (B_k, ρ). Divisão do bloco $B = \widetilde{B_i}$ em relação a (B_k, ρ).

Nos dois casos, os blocos $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ não precisam mais ser divididos em relação a (B_j, σ)

Figura 2: Ilustração do Lema 4 (veja a Figura 1)

O próximo lema descreve um fato importante para a redução da complexidade.

Lema 5 *Suponha que em algum momento o bloco B_j foi dividido nos blocos $\overline{B_j}$ e $\widetilde{B_j}$ (em relação a algum par). Fixe um símbolo σ. Dividir todos os blocos em relação a quaisquer dois dos três pares (B_j, σ), $(\overline{B_j}, \sigma)$ e $(\widetilde{B_j}, \sigma)$ resulta no mesmo que dividir todos os blocos em relação a todos os três pares.*

A Figura 3 ilustra o Lema 5.

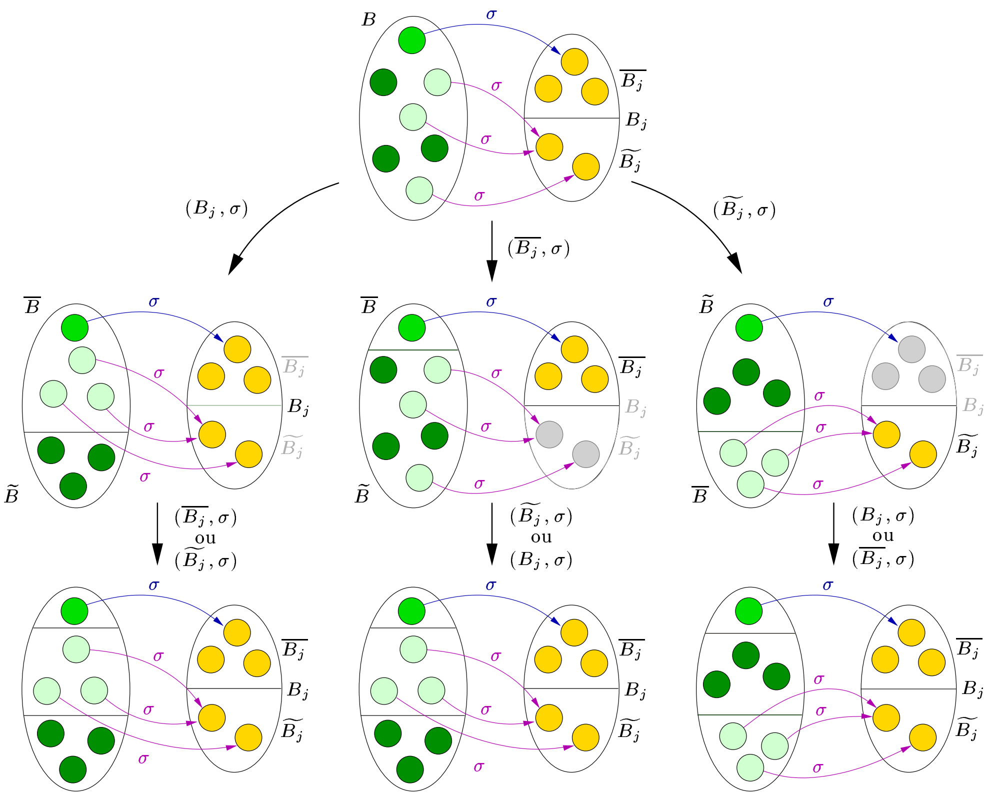


Figura 3: Ilustração do Lema 5

A cada vez que o algoritmo divide os blocos em relação a um par (B_j, σ), novos blocos são criados na partição. Certamente haverá blocos que precisarão ser divididos em relação aos novos blocos, portanto eles devem entrar na lista L. Apoiado no Lema 5, o algoritmo tentará inserir os pares dos blocos menores.

O seguinte lema é uma conseqüência do anterior e nos diz como inicializar a lista L.

Lema 6 *Considere a situação inicial, onde, digamos,* $B = Q$, $B_1 = F$, $B_2 = Q - F$. *Então, para um dado símbolo* σ, *é necessário dividir todos os blocos apenas em relação a* (B_1, σ) *ou a* (B_2, σ).

Temos então o Algoritmo 7, que usa a lista L conforme discutido.

Algoritmo 7

$B_1 \leftarrow F$; $B_2 \leftarrow Q - F$; $L = \emptyset$;
a: *Inicialize L:*
para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
  se $|B_1| < |B_2|$ **então** $L \leftarrow L + (B_1, \sigma)$;
  senão $L \leftarrow L + (B_2, \sigma)$;
fim;
enquanto $L \neq \emptyset$ **faça**
  b: Pegue um par (B_j, σ) de L;
  c: Determine as divisões de todos o blocos *em relação a* (B_j, σ);
  d: $L \leftarrow L - (B_j, \sigma)$;
  e: Divida cada bloco conforme determinado;
  f: *Atualize L de acordo com as divisões que ocorreram:*
    para cada bloco B dividido em $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ **faça**
      para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
        se $(B, \sigma) \in L$
          então $L \leftarrow L + (\overline{B}, \sigma) + (\widetilde{B}, \sigma) - (B, \sigma)$;
          senão se $|\overline{B}| < |\widetilde{B}|$
            então $L \leftarrow L + (\overline{B}, \sigma)$;
            senão $L \leftarrow L + (\widetilde{B}, \sigma)$;
      fim;
    fim;
fim.

(7)

Comparando com o Algoritmo 5, observa-se que a diferença está na escolha do par (B_j, σ). Para essa escolha, o novo algoritmo manipula a lista L.

O Algoritmo 7 termina, pois o número de pares (B_j, σ) é limitado; cada par entra na lista L no máximo uma vez; e a cada iteração removemos um elemento da lista L. Uma discussão sobre a corretude desse algoritmo pode ser vista em ****relatório****.

Análise da complexidade de tempo no pior caso

Para analisar a complexidade do algoritmo, precisamos detalhar mais os passos c e e. Isso é feito no Algoritmo 8, visto mais adiante.

Algoritmo 8

$B_1 \leftarrow F$; $B_2 \leftarrow Q - F$; $L = \emptyset$;
a: *Inicialize L:*
para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
  se $|B_1| < |B_2|$ **então** $L \leftarrow L + (B_1, \sigma)$;
  senão $L \leftarrow L + (B_2, \sigma)$;
fim;
enquanto $L \neq \emptyset$ **faça**
  b: Pegue um par (B_j, σ) de L;
  c: *Determine as divisões de todos o blocos* em relação a (B_j, σ)*:*
    $D \leftarrow \emptyset$;
    para cada $q \in B_j$ **faça** $D \leftarrow D \cup \delta^{-1}(q, \sigma)$ **fim**;
  d: $L \leftarrow L - (B_j, \sigma)$;
  e: *Divida cada bloco conforme determinado:*
    para cada $q \in D$ **faça**
      $\overline{B} \leftarrow$ bloco em que q está;
      se $\delta(p, \sigma) \in B_j$ vale para todo $p \in \overline{B}$ (8)
        então não faça nada;
        senão se $\overline{B}$ não tem ainda um irmão $\widetilde{B}$
          então gere $\widetilde{B}$; $\widetilde{B} \leftarrow \emptyset$;
          mova q de $\overline{B}$ para o seu irmão $\widetilde{B}$;
    fim;
  f: *Atualize L de acordo com as divisões que ocorreram:*
    para cada bloco B dividido em $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ **faça**
      para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
        se $(B, \sigma) \in L$
          então $L \leftarrow L + (\overline{B}, \sigma) + (\widetilde{B}, \sigma) - (B, \sigma)$;
          senão se $|\overline{B}| < |\widetilde{B}|$
            então $L \leftarrow L + (\overline{B}, \sigma)$;
            senão $L \leftarrow L + (\widetilde{B}, \sigma)$;
      fim;
    fim;
fim.

Não discutiremos os detalhes das provas de complexidade de tempo, apenas faremos as seguintes observações:

- o número de possíveis pares é (B_j, σ), ou seja, o tamanho da lista L é no máximo $|\Sigma| n$;
- a lista L deve ser implementada de forma que as operações de manipulação usadas no algoritmo consumam tempo constante;

- a prova da complexidade de tempo dos passos c e e é muito complicada.

Uma discussão um pouco mais completa pode ser vista em ****relatório****.

Em resumo, apresentamos as complexidades de tempo *totais* de cada passo do Algoritmo 8.

Passo	Complexidade
b	$O(\|\Sigma\|\, n)$
c	$O(\|\Sigma\|\, n \log n)$
d	$O(\|\Sigma\|\, n)$
e	$O(\|\Sigma\|\, n \log n)$
f	$O(\|\Sigma\|\, n)$
Total	$O(\|\Sigma\|\, n \log n)$

1.3 O algoritmo de Revuz para autômatos acíclicos

Um autômato determinístico $\mathcal{A}$ é acíclico se o grafo $G(\mathcal{A})$ é acíclico. Autômatos determinísticos acíclicos são bastante usados para representar dicionários [3] e manipular funções booleanas [4].

O algoritmo de minimização que veremos a seguir tem grande importância para essas aplicações, pois além de diminuir o espaço em memória utilizado e agilizar as buscas com autômatos, ele tem complexidade de tempo $O(|\Sigma|n)$.

O nosso estudo foi baseado em [12].

Definições adicionais

Na *definição do problema* muda apenas a entrada, que é restrita a autômatos finitos determinísticos *acíclicos*. Portanto, a entrada é um autômato acíclico $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Com isso, o autômato não deve ser *completo*, isto é, δ é uma função parcial.

Como já foi mencionado, um autômato acíclico $\mathcal{A}$ é um autômato cujo grafo associado $G(\mathcal{A})$ é acíclico.

Seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ uma seqüência de palavras. Vamos definir o *prefixo comum de* X como sendo a seqüência $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ definida da seguinte maneira. Seja

$$P_i = \{u : u \text{ é um prefixo comum entre } x_i \text{ e } x_j, \text{ para algum } j \neq i\} \quad .$$

Então y_i é o prefixo de x_i tal que $|y_i| = max\{|u| : u \in P_i\}$.

O comprimento do prefixo comum de X é a soma dos comprimentos das palavras em Y. Essa definição será útil para a análise de complexidade de tempo do algoritmo.

Exemplo 1.1 *Se $X = (a, b, c)$, então o prefixo comum de X será $Y = (\lambda, \lambda, \lambda)$ e o comprimento será 0. Se $X = (abd, a, abc, bacd, bacddd, babc, abc)$, então o prefixo comum será $Y = (ab, a, abc, bacd, bacd, ba, abc)$, o comprimento do prefixo comum será $|ab| + |a| + |abc| + |bacd| + |bacd| + |ba| + |abc| = 19$.*

A *altura* de um estado q do autômato acíclico $\mathcal{A}$, ou $h(q)$, é o tamanho do caminho de maior comprimento que começa em q e chega a um estado final. Mais formalmente, $h(q) = max\{|x| : \delta(q, x) \in F\}$.

Essa função *altura* induz uma partição $\Pi = \Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_{h(q_0)}$ de Q: Π_i será o conjunto ou bloco de estados de altura i. Diremos que conjunto Π_i é *distinto* se nenhum par de estados em Π_i é equivalente.

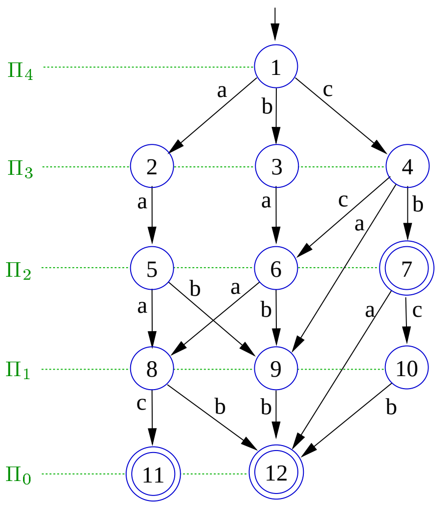


Figura 4: Partição Π

Idéia do algoritmo

A idéia do algoritmo é simples. Dado o autômato acíclico $\mathcal{A}$, a partição Π é calculada e cada estado q é nomeado com uma palavra que descreve as suas transições $\delta(q, \sigma)$. Os nomes dos estados são dados de tal forma que dois estados possuem nomes iguais se e somente se eles são equivalentes. Portanto, o algoritmo percorre os blocos $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \cdots$ nessa ordem, aplicando uma ordenação lexicográfica nos nomes dos estados de cada bloco Π_i, e dessa forma encontrando os estados com nomes iguais. Os estados equivalentes são então unidos, formando um único estado. A nomeação dos estados é feita uma única vez em cada estado, e a ordenação é feita em tempo linear, logo, a complexidade de tempo total é linear no número de transições ($O(|\Sigma|n)$).

A dificuldade maior está em criar os nomes de forma que o gasto total com as ordenações seja de fato linear. Embora o algoritmo de ordenação em si seja linear no tamanho da entrada, o tamanho dos nomes poderia não ser linear em relação ao tamanho do autômato.

O algoritmo

A seguinte propriedade relaciona a função *altura* com a equivalência dos estados.

Propriedade 7 *Se todo Π_j, com $j < i$, é distinto, então dois estados p e q em Π_i são equivalentes se e somente se para qualquer símbolo $\sigma \in \Sigma$ vale que $\delta(q, \sigma) = \delta(p, \sigma)$.*

A Figura 5 mostra um exemplo onde a Propriedade 7 pode ser vista. O bloco Π_0 (Π_j), que está abaixo de Π_1 (Π_i), é distinto. Pelas transições, podemos ver que os estados 9 e 10 são equivalentes (e o estado 8 não é).

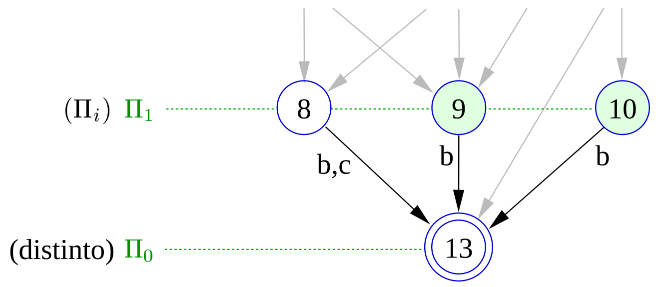


Figura 5: Ilustração da Propriedade 7

Com essa propriedade, é possível construir um algoritmo simples. Primeiro devemos criar a partição Π induzida pelas alturas. Isso é feito percorrendo $G(\mathcal{A})$ como em uma busca em profundidade. A complexidade desse passo é $O(e)$, onde o número de transições e é no máximo $|\Sigma|n$. Em seguida, para cada nível encontramos os estados equivalentes através da ordenação lexicográfica. Veja o Algoritmo 9.

Algoritmo 9

calcule a partição $\Pi = \Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_{h(q_0)}$ induzida pelas alturas;
para $i \leftarrow 0$ **até** $h(q_0)$ **faça**
    ordene os estados de Π_i pelos seus arcos;
    una todos os estados equivalentes;
fim. (9)

A Propriedade 7 pode mostrar que esse algoritmo é correto. Ademais, podemos executar o passo de união dos estados integrado ao passo da ordenação. Isso nos permite enunciar o seguinte lema:

Lema 8 *Usando uma ordenação com complexidade de tempo $O(f(n))$, o Algoritmo 9 minimiza um autômato acíclico em $O(\sum_{i=0}^{h(q_0)} f(|\Pi_i|))$. A complexidade total é $O(e + \sum_{i=0}^{h(q_0)} f(|\Pi_i|))$.*

Portanto, tentaremos usar um algoritmo de ordenação $O(n)$, como veremos a seguir.

Ordenação lexicográfica

Para a ordenação, nomearemos cada estado com uma palavra e aplicaremos uma ordenação lexicográfica. Essa ordenação consiste de várias aplicações de um outro algoritmo conhecido como *bucket sort*. Note que o algoritmo que usaremos é um pouco mais simples, pois queremos apenas distingüir os elementos.

- *Bucket sort*

  Ordena uma seqüência $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de inteiros $1 \leq a_i \leq m$ executando os seguintes passos:

  1. Construa um vetor B de filas vazias: $B[1..m]$;
  2. Percorra a seqüência $a_1, a_2, \cdots, a_n$ inserindo o elemento a_i em $B[a_i]$, o a_i-ésimo *bucket*;
  3. A concatenação das filas $B[1]B[2] \cdots B[m]$ é a seqüencia ordenada.

  As complexidades de tempo e espaço são $O(n+m)$.

- *Ordenação lexicográfica*

  Ordena uma seqüência $S = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ de k-uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik})$, onde $1 \leq a_{ij} \leq m$. No primeiro passo, aplica-se o algoritmo *bucket sort* na seqüência S considerando o k-ésimo inteiro de cada k-upla, ou seja, o *bucket sort* considerará a seqüência $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$, mas ordenará na verdade a seqüência S. O próximo passo considerará o $(k-1)$-ésimo inteiro de cada A_i e a seqüência S já ordenada de acordo com o k-ésimo inteiro. Portanto, por indução, a seqüência final é a seqüência S ordenada.

  A complexidade de tempo é $O(k(n+m))$ e o espaço em memória é $O(n+m)$.

A generalização da ordenação lexicográfica para seqüências de k-uplas de tamanho variável, entre 1 e L_{max}, é feita ordenando-se primeiro pelo tamanho das k-uplas e em seguida aplicando-se as ordenações, com uma pequena diferença. Quando o algoritmo considera o l-ésimo inteiro apenas as k-uplas com pelo menos l inteiros são ordenadas.

Uma descrição completa desse algoritmo pode ser encontrada em [2]. Com um pouco mais de sofisticação, esse algoritmo pode ser melhorado aplicando-se os *bucket sorts* da esquerda para a direita. Não explicaremos os detalhes aqui, mas usaremos essa idéia no Algoritmo 10, mostrado mais adiante.

Algoritmo 10

Entrada: a seqüência $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de k_i-uplas $(a_1, a_2, \cdots, a_{k_i}, \$)$, onde a_j está entre 1 e m.
Saída: LIGUAIS, a lista de k_i-uplas iguais.

coloque $A_1, A_2, \cdots, A_n$ em LISTA;
insira LISTA em FILA2;
$i \leftarrow 0$;
repita
  mova FILA2 para FILA1;
  i++;
  enquanto FILA1 não vazia **faça**
    seja L a primeira lista em FILA1;
    remova L de FILA1;
    enquanto L não vazia **faça**
      seja A= $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \$)$ a primeira k-upla em L;
      remova A de L;
      se $B[a_i]$ vazio
        então adicione a_i a NAOVAZIOS;
      mova A para o *bucket* $B[a_i]$;
    fim;
    para cada $a \in$ NAOVAZIOS tal que $a \neq \$$
          e $B[a]$ tenha mais de um elemento **faça**
      mova os elementos de $B[a]$ para uma lista LTEMP;
      insira LTEMP em FILA2;
    fim;
    descarte os *buckets* que contenham apenas uma k-upla;
    mova os elementos de $B[\$]$ para LIGUAIS;
  fim;
até FILA2 vazia;

(10)

Eis o que o Algoritmo 10 faz.

Lema 9 *Seja uma seqüência de n k-uplas, com k variável, onde cada componente de uma k-upla está entre* 1 *e m. O Algoritmo 10 devolve a lista das k-uplas que são iguais a pelo menos uma outra k-upla da seqüência. O tempo gasto pelo algoritmo é $O(n')$, onde n' é o* comprimento do prefixo comum *da seqüência. O espaço em memória necessário é $O(n+m)$.*

O algoritmo final

Vamos tentar finalmente juntar o Algortimo 10 ao Algoritmo 9 para obtermos um algoritmo linear. Para isso é preciso discutir a nomeação dos estados. Cada estado q receberá um rótulo, definido da seguinte maneira.

$$rótulo(q) = (F \; ou \; N, \; \sigma_1, \; p_1, \; \sigma_2, \; p_2, \; \cdots, \; \sigma_k, \; p_k) \; ,$$

onde F ou N diz se o estado q é final ou não, σ_i é o símbolo do i-ésimo arco, e p_i é um identificador (número) do estado apontado pelo i-ésimo arco. A subseqüência $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ deve estar ordenada.

De acordo com o Lema 8, com esses rótulos nós obteremos uma complexidade de tempo $O(\sum_{i=0}^{h(q_0)} r'_i + e)$ no total, onde r'_i é o *comprimento do prefixo comum* dos rótulos dos estados de altura i. Portanto, para obtermos a linearidade, precisamos limitar o tamanho dos rótulos, que de certa forma dependem da representação dos valores p_i, os números dos estados. Por exemplo:

- Se representarmos esses números com dígitos, o comprimento da representação de cada um deles será limitado por $\log |Q|$. Assim, o comprimento dos rótulos crescerá por um fator $\log |Q|$, ou seja, o tempo não será linear.

- Podemos então enxergar os números como sendo letras, mas assim o tamanho do vetor B de filas (*buckets*) terá que ser $max\{|Q|, |\Sigma|\}$. Entretanto, note que desse modo, teremos que

  $$\sum_{i=0}^{h(q_0)} r'_i = \sum_{i=0}^{h(q_0)} |E_i| \; ,$$

  no pior caso, onde E_i é o número de arcos que saem dos estados de Π_i. Então a complexidade de tempo será:

  $$O(\sum_{i=0}^{h(q_0)} |E_i| + e) = O(e + e) = O(|\Sigma| n) \; .$$

É possível diminuir o limitante para o tamanho do vetor B com uma renumeração dos estados. A idéia é reutilizar os números a cada ordenação. Para isso, um estado só receberá um número se ele for usado.

Os detalhes dessa técnica podem ser vistos em ****relatório****.

Com isso, o tamanho do vetor B fica limitado por $max\{|\Sigma|, max\{E_i\}_{i=0}^{h(q_0)}\}$.

Finalmente, o Algoritmo 11 mostrado a seguir é a versão final.

Algoritmo 11

Calcule h para todos os estados e crie a partição Π;
Una todos os estados em Π_0; // *eles são equivalentes*
para $j \leftarrow 1$ **até** $h(q_0) - 1$ **faça**
  coloque Π_j como uma lista em FILA2; $i \leftarrow 0$;
  repita
    mova FILA2 para FILA1;
    $i{+}{+}$;
    enquanto FILA1 não vazia **faça**
      seja L a primeira lista em FILA1; remova L de FILA1;
      enquanto L não vazia **faça**
        seja S o primeiro estado em L; remova S de L;
        mova S para o *bucket* $B[a_i]$;
      fim;
      para cada $a \neq \$$ tal que
          $B[a]$ tem mais de um elemento **faça**
        insira os elementos de $B[a]$ como uma lista em FILA2;
      fim;
      una todos os estados em $B[\$]$;
      reinicialize os *buckets*;
    fim;
  até FILA2 vazia;
fim. (11)

A Figura 6 mostra um momento da execução do algoritmo, quando $j = 1$ e $i = 4$. Podemos ver, pelos *buckets*, que os estados 9 e 10 estão prestes a ser unidos.

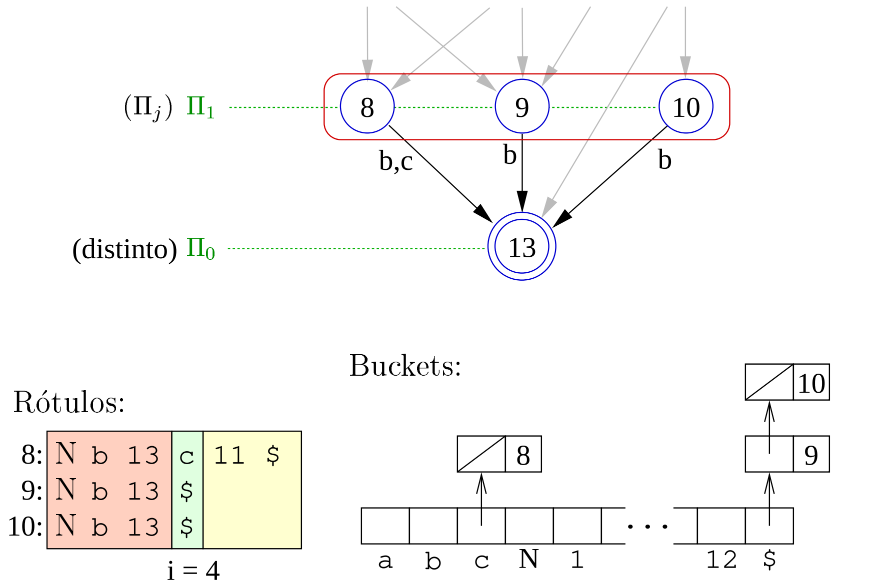


Figura 6: Um passo da ordenação do bloco Π_2

2 Uso de autômatos finitos num problema de busca de padrões

Neste projeto estudamos também um problema particular de busca de padrões em textos. Trata-se do caso em que o padrão é um conjunto finito K de palavras.

O nosso estudo foi centrado no algoritmo clássico de Alfred Aho e Margaret Corasick. Em [1] eles apresentam o algoritmo, tendo como motivação a otimização de um sistema de consulta a um banco de dados de referências bibliográficas. Os resultados em relação aos algoritmos convencionais da época foram excelentes. Outras descrições do algoritmo podem ser encontradas em [5, 6].

Vamos então descrever o problema e o modelo de solução, que envolve a construção de um autômato finito determinístico que representa as palavras em K. Para essa construção foram aplicadas algumas idéias do algoritmo KMP, de Knuth, Morris e Pratt [10]. Esse algoritmo resolve o problema da busca de padrões para o caso em que o padrão é uma palavra.

2.1 Descrição do Problema

Seja $K = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$ um conjunto finito de palavras em Σ^*, as quais chamaremos de *palavras-chave*, e x, também em Σ^*, uma palavra qualquer que chamaremos de *texto*. O problema que queremos resolver é localizar e identificar todos os fatores de x que são também *palavras-chave*.

Para isso, utilizaremos um autômato que reconhece a linguagem $\Sigma^* K$. O autômato recebe como entrada o *texto* x e gera uma saída contendo as posições em x onde alguma *palavra-chave* aparece como fator. Essa fase é a *busca* propriamente dita, e sua complexidade de tempo é $O(|x|)$, dependendo da implementação da função de transição. Note que esse tempo não depende do número de *palavras-chave*.

Há também a fase de construção do autômato. Ela é feita em duas etapas, em tempo $O(|\Sigma'|m)$ no total, onde m é a soma dos comprimentos das palavras em K e $\Sigma' \subseteq \Sigma$ é o conjunto dos símbolos que ocorrem em K. A primeira etapa consiste em construir, a partir do conjunto K, uma máquina de estados muito semelhante a um autômato finito determinístico. Essa construção utiliza as idéias do algoritmo KMP, e pode ser feita em tempo $O(m)$, dependendo da implementação. Em seguida, a partir da máquina de estados, obtém-se em tempo $O(|\Sigma'|m)$ o autômato finito determinístico, que reconhece a linguagem $\Sigma^* K$.

Portanto, o tempo de construir e aplicar a máquina de estados é $O(|x| + m)$. Note que aplicando o algoritmo KMP k vezes com entrada x, uma vez para cada palavra em K, a complexidade total de pior caso seria $O(k|x|+m)$.

2.2 O algoritmo de Aho e Corasick

Como já mencionamos, o algoritmo funciona em duas fases. A primeira constrói um autômato finito determinístico que reconhece a linguagem Σ^*K. A segunda executa a *busca* fornecendo o texto x como entrada para o autômato.

A máquina de estados inicial

Começaremos a construção do autômato com a construção de uma máquina de estados que possui um conjunto finito de estados e três funções. Essa máquina funcionará da seguinte forma: ela recebe uma palavra x e lê cada símbolo de x em seqüência. Para cada símbolo, ela executa algumas transições de estado e possivelmente gera uma saída. De fato, ela é muito semelhante a um autômato finito determinístico, a diferença é que há duas funções de transição, a usual, que chamaremos de g, e a de falha, que chamaremos de f. A função f é usada para "voltar" algumas transições no caso em que a função g indica $falha$; ela tem o mesmo significado da função de falha do algortimo KMP. Há também a função *saída*, que associa uma saída a cada estado.

Para facilitar o nosso estudo, vamos definir a máquina de estados a partir de um autômato finito determinístico.

A máquina de estados é uma tripla $(\mathcal{B}, f, \mathit{saída})$, onde

- $\mathcal{B} = (Q \cup \{falha\}, \Sigma, g, q_0, F)$ é um autômato finito determinístico onde

  - Q é um conjunto finito de estados;
  - Σ é o alfabeto de entrada;
  - $g : Q \times \Sigma \to Q \cup \{falha\}$ é a função de transição;
  - q_0 é o estado inicial;
  - F é o conjunto de estados finais.

  Note que adicionamos um estado com nome $falha$. Para todo q em Q e todo σ em Σ, chamaremos as transições tais que $g(q, \sigma) = falha$ de transições *não definidas*. Convencionamos também que $g(q_0, \sigma) \neq falha$, para todo $\sigma \in \Sigma$.

- $f : Q \to Q$ é a função de transição de falha;

- $\mathit{saída} : Q \to 2^K$ é a função de saída;

Cada *ciclo* da máquina é definido da forma a seguir. Seja q o estado atual e σ o símbolo corrente da entrada x.

1. Se $g(q, \sigma) = q'$, $q' \in Q$, a máquina faz uma transição usual, correspondente à transição do autômato $\mathcal{B}$. Ou seja, muda para o estado q' e avança a cabeça de leitura. Se $\mathit{saída}(q') \neq \emptyset$, então o máquina emite $\mathit{saída}(q')$ e a posição do último símbolo lido como parte da saída. A máquina então começará outro ciclo.

2. Se $g(q, \sigma) = falha$, que é uma transição *não definida* em $\mathcal{B}$, a máquina faz uma *transição de falha*: digamos que $f(q) = q'$, então a máquina reinicia o ciclo com $q = q'$ e σ continuando como símbolo corrente. Note que a máquina está fazendo uma nova tentativa de encontrar uma palavra-chave, já que o autômato $\mathcal{B}$ apontou uma falha.

O Algoritmo 12 descreve mais precisamente o comportamento da máquina.

Algoritmo 12

Entrada: Uma palavra $x = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, onde cada σ_i é um símbolo de entrada, e a máquina de estados descrita acima.
Saída: As posições das ocorrências das palavras-chave em x.

$estado \leftarrow 0$;
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  enquanto $g(estado, \sigma_i) = falha$ **faça**
    $estado \leftarrow f(estado)$;
  fim;
  $estado \leftarrow g(estado, \sigma_i)$;
  se $saída(estado) \neq \emptyset$
    então
      imprima i;
      imprima $saída(estado)$;
fim.

(12)

Para que essa máquina seja capaz de resolver o problema, ela deve satisfazer os requisitos que discutiremos informalmente a seguir.

1. Considerando o grafo $G(\mathcal{B})$ sem as transições *não definidas* e sem os possíveis laços do estado q_0, teremos que ter uma árvore onde:

   - Cada nó (estado) representa um prefixo de alguma palavra-chave.
   - A raiz é o estado q_0 e representa a palavra vazia.
   - Sejam q e p em Q e σ em Σ. Sejam também x o prefixo representado por q e y o prefixo representado por p. Então, a transição $g(q, \sigma) = p$ significa que $x\sigma = y$.

   Essa árvore é conhecida como árvore de busca digital que contém as palavras em K. Vamos chamar essa árvore de T.

   Além disso, por definição, faremos com que $g(q_0, \sigma) = q_0$, para todo σ tal que $g(q_0, \sigma)$ não foi definido acima. Para as outras transições $g(q, \sigma)$ não definidas, onde $q \in Q$ e $\sigma \in \Sigma$, faremos com que $g(q, \sigma) = falha$.

2. Sejam q e p em Q, u o prefixo representado por q e v o prefixo representado por p. A função f deve ser tal que $f(q) = p$ se e somente se v é o sufixo de maior comprimento de u que é também prefixo de alguma palavra em K. A função $falha$ definida desse modo tem grande importância para a complexidade final do algoritmo. Ela permite

que na busca nunca seja necessário voltar na entrada x. Lembrando novamente, essa é a mesma idéia usada no algoritmo KMP.

3. Sejam q em Q e u o prefixo representado por q. A função *saída* deve ser tal que

$$saída(q) = \{v : v \in K \text{ e } v \text{ é sufixo de } u\} \quad .$$

Construção da máquina de estados

Construiremos primeiro o autômato $\mathcal{B}$, e nessa construção já é possível definir parte da função *saída*. Então, a partir de $\mathcal{B}$, construiremos a função f. A construção definitiva de *saída* também será feita em conjunto com a contrução de f.

A construção de $\mathcal{B}$ será feita a partir da árvore T descrita anteriormente. Inicialmente, a árvore T só possui o nó raiz, que, lembrando, representa a palavra vazia. Para cada palavra y em K, insira y em T da seguinte fo rma.

1. Percorra T até o estado p de forma que p represente o maior prefixo de y que esteja em T.

2. A partir de p, insira um novo caminho em T de tal forma que o último estado do caminho represente a palavra y. Seja q esse último estado.

3. Defina $saída(q) = \{y\}$.

Execute então a finalização a seguir.

1. Para todo $\sigma \in \Sigma$ tal que $g(q_0, \sigma)$ ainda não foi definido, considere $g(q_0, \sigma) = q_0$.

2. Para todo $\sigma \in \Sigma$ e $q \in Q$ tais que $g(q, \sigma)$ ainda não foi definido, considere $g(q, \sigma) = falha$.

3. O conjunto de estados finais de $\mathcal{B}$ é $F = \{q \in Q : saída(q) \neq \emptyset\}$.

O Algoritmo 13 mostra esse procedimento em linguagem mais precisa.

Algoritmo 13

Entrada: O conjunto de palavras-chave $K = \{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$.
Saída: A função g e a função *saída* parcialmente definida.
Observação: Assumiremos que, para todo novo estado q criado, $g(q, \sigma) = falha$ para todo $\sigma \in \Sigma$.

$novoestado \leftarrow 0$;
$q_0 \leftarrow novoestado$;
$saída(q_0) = \emptyset$;

para $i \leftarrow 1$ **até** k **faça**
    seja $y_i = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m_i}$;
    $estado \leftarrow q_0$; $j \leftarrow 1$;
    enquanto $g(estado, \sigma_j) \neq falha$ **faça**
        $estado \leftarrow g(estado, \sigma_j)$;
        $j{+}{+}$;
    fim;
    para $p \leftarrow j$ **até** m_i **faça**
        $novoestado{+}{+}$;
        $g(estado, \sigma_p) \leftarrow novoestado$;
        $saída(novoestado) = \emptyset$;
        $estado \leftarrow novoestado$;
    fim;
    $saída(estado) \leftarrow \{y_i\}$;
fim;

para todo $\sigma \in \Sigma$ tal que $g(q_0, \sigma) = falha$ **faça**
    $g(q_0, \sigma) \leftarrow q_0$;
fim.

(13)

Veja também a Figura 7, que mostra o resultado desse passo da construção da máquina de estados para o dicionário {he, she, hers, his}.

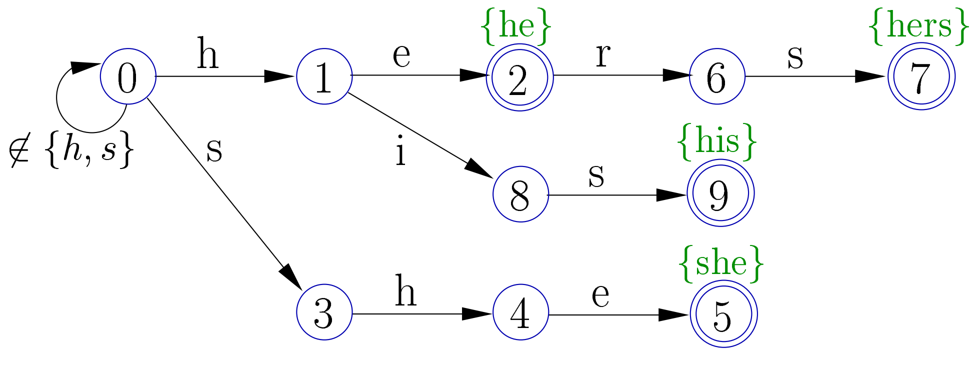


Figura 7: Primeira etapa da construção da máquina de estados

Para a construção de f e o restante de *saída*, novamente nos guiaremos pelos requisitos discutidos anteriormente.

Usaremos o Algoritmo 14, que percorre a árvore T como em uma busca em largura. Portanto, fica claro que a construção de f é feita a partir da função g. Vamos introduzir então a noção de *profundidade*. A *profundidade* de um estado q em T é o tamanho do caminho de menor comprimento que começa em q_0 e termina em q.

O Algoritmo 14 percorre a árvore por nível de profundidade, começando da profundidade 1. A função falha de um estado é definida a partir dos estados das profundidades menores do que a dele. Podemos já definir inicialmente $f(q) = q_0$ para todo q que tenha profundidade 1. Suponha agora que f já tenha sido definida para todos os estados de nível menor do que d. Sejam $q \in Q$ um estado de nível $d-1$ e $p \in Q$ um estado tal que $g(q, \sigma) = p$ para algum $\sigma \in \Sigma$ (p é de nível d), queremos definir $f(p)$. Seja u a palavra representada por q em T, e $v = u\sigma$ a palavra representada por p. Temos que $f(q) = r \in Q$ representa o prefixo de maior comprimento z de alguma palavra-chave que é também um sufixo de u. O algoritmo então procura pelo estado $g(r, \sigma) = s$ que representa o prefixo $z\sigma$, tal que $v = tz\sigma$, para algum $t \in \Sigma^*$. Se $s \neq falha$, então podemos definir $f(p) = s$. Caso contrário, consideramos $f(r)$, que também representa um sufixo de u que é prefixo de alguma palavra-chave. Logo, podemos aplicar a mesma idéia até encontrarmos $f(p)$. Num caso extremo, $f(p) = q_0$, pois $g(q_0, \sigma) \neq falha$.

Ao definirmos $f(p)$, temos que a palavra w representada por $f(p)$ é um sufixo da palavra v representada por p. Logo, podemos dizer que $\textit{saída}(f(p))$ deve estar contido em $\textit{saída}(p)$.

Veja então o Algoritmo 14.

Algoritmo 14

Entrada: As funções g e *saída* devolvidas pelo Algoritmo 13.
Saída: Funções f e *saída*.

$fila \leftarrow$ fila vazia;
para cada σ tal que $g(q_0, \sigma) \neq q_0$ **faça**
  $s = g(q_0, \sigma)$;
  insira s na $fila$;
  $f(s) \leftarrow q_0$;
fim;
enquanto $fila$ não vazia **faça**
  seja r o próximo estado da $fila$;
  remova r da $fila$;
  para cada σ tal que $g(r, \sigma) \neq falha$ **faça**
    $s = g(r, \sigma)$;
    insira s na $fila$;
    $estado \leftarrow f(r)$;
    enquanto $g(estado, \sigma) = falha$ **faça**
      $estado \leftarrow f(estado)$;
    fim;
    $f(s) \leftarrow g(estado, \sigma)$;
    $saída(s) \leftarrow saída(s) \cup saída(f(s))$;
  fim;
fim.

(14)

A Figura 8 mostra a máquina de estados (veja também a Figura 7).

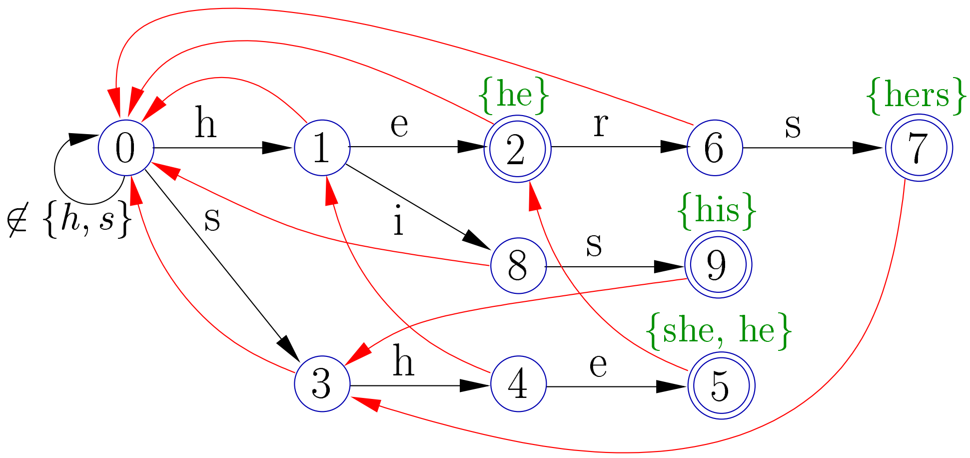


Figura 8: A máquina de estados obtida a partir da árvore da Figura 7

Comentários sobre as complexidades

- *Busca*

Podemos ver que cada passo do laço mais externo do Algoritmo 12 processa um símbolo de x. Logo, o número de iterações é $|x|$. É visível também que a cada iteração, o algoritmo executa uma transição g, então o número de transições usuais também é $|x|$. Temos ainda que o número total de transições de falha não pode ultrapassar o número de transições usuais em nenhum momento da execução do algoritmo. Logo, o número de transições de falha é, no pior caso, $|x|$. Disso segue que o tempo gasto pelo Algoritmo 12 é $O(|x|)$.

- *Construção*

  Não há muitas dificuldades para observarmos que o Algoritmo 13 tem complexidade de tempo $O(m)$.

  O Algoritmo 14 também possui complexidade de tempo $O(m)$, mas é preciso usar um argumento semelhante ao da justificativa da *busca*.

Portanto, o algoritmo todo, que compreende a *construção* e a *busca*, tem complexidade de tempo $O(|x| + m)$.

Obtenção do autômato finito determinístico final

Podemos obter um autômato finito determinístico a partir da máquina de estados descrita até agora.

Para isso definiremos a função de transição δ de forma que ela faça o papel das funções g e f. Note que desse modo a busca fica mais simples, assim como o cálculo da complexidade de tempo, pois é feita exatamente uma transição por símbolo da entrada x.

A idéia é esboçada a seguir. Sejam $q \in Q$ e $\sigma \in \Sigma$. Se $g(q,\sigma) = falha$, então podemos dizer que $\delta(q,\sigma) = \delta(f(q),\sigma)$. Caso contrário, temos simplesmente que $\delta(q,\sigma) = g(q,\sigma)$.

A descrição completa pode ser vista no Algoritmo 15.

Algoritmo 15

Entrada: A função g devolvida pelo Algoritmo 13 e a função f devolvida pelo Algoritmo 14.
Saída: A função δ para o autômato final.

$fila \leftarrow$ fila vazia;
para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
  $\delta(q_0, \sigma) = g(q_0, \sigma)$;
  se $g(q_0, \sigma) \neq q_0$ **então** insira $g(q_0, \sigma)$ na $fila$;
fim;
enquanto $fila$ não vazia **faça**
  seja r o próximo estado da $fila$;
  remova r da $fila$;
  para cada $\sigma \in \Sigma$ **faça**
    se $g(r, \sigma) \neq falha$
      então
        $s = g(r, \sigma)$;
        insira s na $fila$;
        $\delta(r, \sigma) \leftarrow s$;
      senão $\delta(r, \sigma) \leftarrow \delta(f(r), \sigma)$;
  fim;
fim.

(15)

A Figura 9 mostra o autômato final, obtido da máquina de estados da Figura 8.

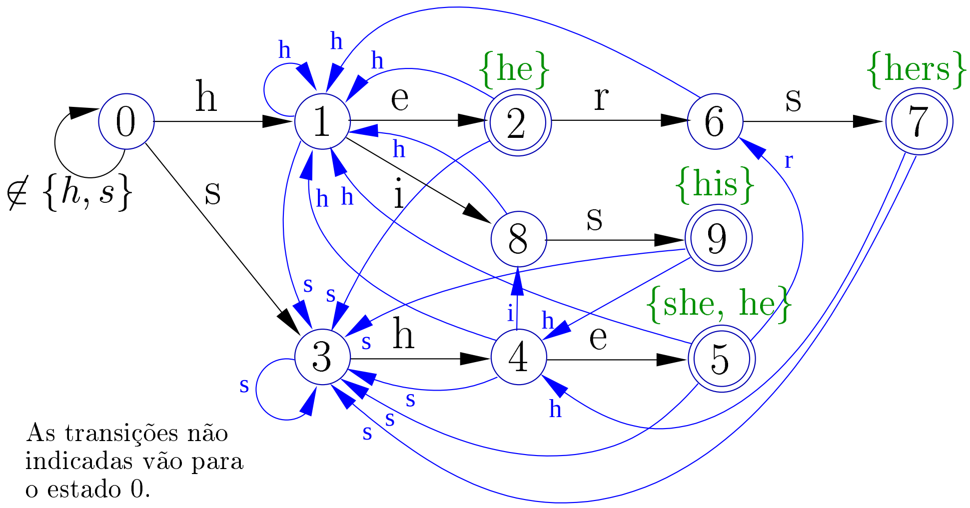


Figura 9: O autômato obtido da máquina de estados da Figura 8.

A complexidade de tempo dessa construção é $O(|\Sigma|m)$. O número de operações da busca usando a máquina de estados pode ser reduzido em até metade se usarmos o autômato, já que o autômato não faz transições de falha. Porém, não há uma forma confiável de estimar essa redução. Ademais, a complexidade de tempo da busca é a mesma.

Referências

[1] A.V. Aho and M.J. Corasick. Efficient string matching: an aid to bibliographic search. *Communications of the ACM*, 18:333–340, 1975.

[2] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, and J.D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms.* Addison Wesley: Reading, MA, 1974.

[3] A.V. Aho, R. Sethi, and J.D. Ullman. *Compilers, Priciples, Techniques and Tools.* Addison Wesley: Reading, MA, 1986.

[4] R.E. Bryant. Graph-based algorithms for boolean function manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, C-35(5):677–691.

[5] M. Crochemore and C. Hancart. Automata for matching patterns. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 2, Linear Modeling: Background and Application, chapter 9, pages 399–462. Springer-Verlag, 1997.

[6] M. Crochemore and C. Hancart. Pattern matching in strings. In M.J. Atallah, editor, *Algorithms and Theory of Computation Handbook*, chapter 11, pages 11.1–11.28. CRC Press, 1998.

[7] D. Gries. Describing an algorithm by Hopcroft. *Acta Informatica*, 2:97–109, 1973.

[8] J. Hopcroft. An $n \log n$ algorithm for minimizing states in a finite automaton. In *Theory of Machines and Computations*, pages 189–196. Academic Press, 1971.

[9] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.* Addison-Wesley, 1979.

[10] D. E. Knuth, J. H. Morris, and V. R. Pratt. Fast pattern matching in string. *SIAM Journal of Computing*, 6:323–350, 1977.

[11] H.R. Lewis and C.H. Papadimitriou. *Elements of the Theory of Computation.* Prentice Hall, 1997.

[12] D. Revuz. Minimization of acyclic deterministic automata in linear time. *Theoretical Computer Science.*, 92:181–189, 1992.